This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math
9008
99.3

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Math 9208.99.3

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

13392

Über die

Flächeninhalte und Bogenlängen

von

Fusspunktkurven und Rollkurven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

vorgelegt von

Paul Franck,

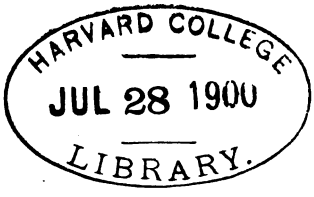
cand. prob. und Vicar an der Realschule in Oschatz.

Meissen

Druck von C. E. Klinkicht & Sohn

1899.

Math 9008.99.3



Farrar fund

Inhalts-Verzeichnis.

I. Einleitung.

1. Bezeichnungen und Definitionen.
2. Geschichtlicher Überblick.
3. Aufgabe und Inhalt der Arbeit.

II. Beziehung zwischen den Fusspunktkurven und den Rollkurven einer und derselben Kurve.

1. Analytische Ableitung der Beziehung.
2. Einige Hülfssätze.
3. Geometrische Ableitung der Beziehung aus den Sätzen von Ekama.
4. Geometrische Ableitung nach Habich.
5. Über die geometrische Bedeutung und die Berechnung der vorkommenden Integrale.

III. Der Irrtum Steiners in seinen Betrachtungen über die Fusspunktkurven.

1. Der Fehler in Steiners Betrachtungen.
2. Verbesserung der Steinerschen Betrachtungen.
3. Ableitung einiger Formeln.
4. Analytische Ableitung der verbesserten Formel von Steiner.

IV. Vergleichung der Flächeninhalte der ∞^2 Fusspunktkurven einer gegebenen Kurve.

1. Ableitung der Fundamentalformel.
2. Transformation und Discussion dieser Formel.
3. Bestimmung des Krümmungsschwerpunktes.
4. Die Beziehung zwischen dem Krümmungsschwerpunkt und dem Minimumpol.
5. Anwendung dieser Ergebnisse auf die Hyperbel.

V. Verallgemeinerung des Steinerschen Problems.

1. Vergleichung der Flächeninhalte.
2. Vergleichung der Bogenlängen.

I. Einleitung.

§ 1. Bezeichnungen und Definitionen.

In der vorliegenden Arbeit wird hauptsächlich von Fusspunktkurven und Rollkurven die Rede sein. Fällt man von einem Punkt P Lote auf die Tangenten einer Kurve K, so nennt man den geometrischen Ort der Fusspunkte dieser Lote bekanntlich die Fusspunktkurve der Kurve K für den Pol P. Da man als Pol der Reihe nach alle ∞^2 Punkte der Ebene wählen kann, so sind jeder Kurve K ∞^2 Fusspunktkurven M zugeordnet. Lässt man eine Kurve K auf einer Kurve K' rollen, so beschreibt irgend ein mit K verbunden gedachter Punkt P eine Kurve, die man Rollkurve nennt. Die Kurve K bezeichnet man wohl als die Generatrix, K' als die Direktrix und P als den erzeugenden Punkt oder den Pol derselben. Man sieht, dass sich auch hier entsprechend den ∞^2 möglichen Punkten P ∞^2 Rollkurven N ergeben. Ist K' thatsächlich eine krumme Kurve, so soll die Rollkurve als eine allgemeine Rollkurve bezeichnet werden. Ist K' aber eine Gerade, so wird die Rollkurve eine spezielle genannt werden. Die Flächeninhalte und Bogenlängen dieser Kurvenscharen sind es, die einer Betrachtung unterzogen werden sollen. Was unter der Bogenlänge solcher Kurven zu verstehen ist, bedarf keiner Erläuterung; wohl aber ist es nötig, den Begriff des Flächeninhalts näher festzustellen.

Ist K eine geschlossene Kurve, so ist auch M geschlossen; die Fläche dieser geschlossenen Kurve M ist dann die Fläche der Fusspunktkurve. Ist m_1 m_2 das dem Bogen k_1 k_2 entsprechende Bogenstück der Fusspunktkurve von K hinsichtlich P, so soll unter dem Flächeninhalt dieses Fusspunktbogens das

dreieckige Flächenstück $P\ m_1\ m_2$ verstanden werden, das von dem Bogen $m_1\ m_2$ und den Loten $P\ m_1$ und $P\ m_2$ von P auf die Tangenten von K in den Punkten k_1 und k_2 begrenzt wird.

Rollt eine Kurve K um einen Bogen $k_1\ k_2$ auf einer Kurve K' fort, so dass beim Anfang der Bewegung k'_1 und beim Ende derselben k'_2 der Berührungspunkt von K mit K' ist, und der Punkt P zu Beginn der Bewegung die Lage p_1 und zum Schluss die Lage p_2 besitzt, so wird im Folgenden das viereckige Flächenstück $k'_1\ p_1\ p_2\ k'_2$ als der Flächeninhalt erster Art N_1 der Rollkurve des Kurvenbogens $k_1\ k_2$ hinsichtlich des Punktes P als Pol und des Bogens $k'_1\ k'_2$ als Direktrix bezeichnet werden. Ist noch $p_1\ p'_1$ das Lot von p_1 auf die Tangente von K' in k'_1 und $p_2\ p'_2$ das Lot von p_2 auf die Tangente von K' in k'_2, so soll das sechseckige Flächenstück $k'_1\ p'_1\ p_1\ p_2\ p'_2\ k'_2$ der Flächeninhalt zweiter Art N_2 dieses Rollkurvenbogens heissen. Dann ist (Fig. 1)

$$N_2 = N_1 + p_2\ p'_2\ k'_2 - p_1\ p'_1\ k'_1.$$

Einer geschlossenen Kurve K, die ein oder mehrere Mal auf einer Kurve K' abrollt, entsprechen keineswegs immer geschlossene Rollkurven. Doch ist dann stets

$$p_1\ p'_1\ k'_1 = p_2\ p'_2\ k'_2,$$

also auch $N_2 = N_1$.

Die Flächeninhalte erster und zweiter Art sind dann also einander gleich.

Ist die Direktrix K' eine Gerade, so ist der Flächeninhalt erster Art N_1 das viereckige Flächenstück $k'_1\ p_1\ p_2\ k'_2$ zwischen der Geraden, der Rollkurve N und den Verbindungslinien $p_1\ k'_1$ und $p_2\ k'_2$. Der Flächeninhalt zweiter Art N_2 wird bei diesen speziellen Rollkurven ebenfalls ein viereckiges Flächenstück, nämlich das Flächenstück $p'_1\ p_1\ p_2\ p'_2$ zwischen der Geraden, der Rollkurve N und den Loten von p_1 und p_2 auf die Gerade. Es ist wieder $N_1 = N_2$, wenn K geschlossen ist und n-mal auf der Geraden abrollt, wo n eine ganze Zahl bedeuten soll.

Bei gewissen Untersuchungen wird ein mit der Kurve K invariant verknüpfter Punkt, der sogenannte Krümmungsschwerpunkt, eine wichtige Rolle spielen. Unter dem Krümmungs-

schwerpunkt S eines Kurvenbogens $k_1\ k_2$ versteht man den Mittelpunkt paralleler an dem Bogen angreifender Kräfte, deren Stärke der Krümmung proportional ist, und deren Richtung gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem die Krümmung gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen hat. Eine Umkehrung des Vorzeichens des Krümmungsradius von K und damit auch des Vorzeichens der Krümmung erfolgt z. B. an jedem Wendepunkt von K. Der Punkt S gewinnt nur dann wirklich die Bedeutung eines Schwerpunktes, wenn jene Kräfte alle dieselbe Richtung haben; $k_1\ k_2$ oder K darf in diesem Falle also keinen Wendepunkt besitzen.

Der Begriff Krümmungsschwerpunkt in diesem eigentlichen Sinne ist von Steiner[1]) eingeführt worden, die obige Verallgemeinerung hat Wetzig[2]) gegeben.

§ 2. Geschichtlicher Überblick.

Spezielle Sätze über den Flächeninhalt und die Bogenlänge von Fusspunktkurven und besonders von Rollkurven sind schon lange bekannt. Aber erst Steiner hat allgemeine Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt. Nachdem er 1835[3]) und 1838[4]) seine Resultate zum Teil in Gestalt von Aufgaben und Lehrsätzen ohne Beweis mitgeteilt hatte, veröffentlichte er 1840[1]) seine beiden Abhandlungen „Über den Krümmungsschwerpunkt", in denen er die Ergebnisse seiner Untersuchungen durch geometrische Betrachtungen ableitete.

Steiner führt hierbei zunächst Beschränkungen über die Kurven K ein, die er betrachtet. Er setzt von denselben voraus, dass sie geschlossen und stetig konvex sind und sich nicht selbst schneiden; Wendepunkte und Doppelpunkte werden also ausdrücklich ausgeschlossen. Unter dieser Beschränkung vergleicht Steiner zuerst die Flächeninhalte der ∞^2 Fusspunktkurven M einer beliebigen Kurve K. Nun kann der Flächen-

1) Crelles Journal, Band XXI, 1840. (S. 33—63 und 101—133.)
2) Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band V, 1860.
3) Crelles Journal, Band XIV, S. 88—92.
4) Crelles Journal, Band XVIII, S. 278—280 und 369—375.

inhalt nur ∞^1 Werte annehmen. Daher müssen sich die ∞^2 Kurven M zu ∞^1 Scharen von je ∞^1 Kurven von gleichem Inhalt anordnen. Die ∞^2 Punkte P werden damit gleichfalls zu ∞^1 Scharen von je ∞^1 Punkten zusammengefasst, denen Fusspunktkurven gleichen Flächeninhalts entsprechen. Die ∞^1 Punkte einer Schar bilden eine Kurve; es ergiebt sich also eine Schar von ∞^1 Kurven, die mit Γ bezeichnet werden möge. Die Aufgabe, die Beziehung zwischen den Flächeninhalten irgend zweier Punkte P sowie diese Kurvenschar Γ zu finden, soll im Folgenden das Problem A genannt werden. Wie Steiner findet, sind diese ∞^1 Kurven konzentrische Kreise. Den Punkten P eines der Kreise entsprechen Fusspunktkurven gleichen Inhalts. Dem gemeinsamen Mittelpunkt entspricht die Fusspunktkurve kleinsten Inhalts; er wird deswegen auch der Minimumpol T genannt. Der Flächeninhalt der Fusspunktkurve eines andern Punktes P übertrifft diesen kleinsten Inhalt um die halbe Kreisfläche vom Radius PT.

Eine ganz gleichartige Aufgabe bietet sich dar bei den ∞^2 speziellen Rollkurven einer Kurve K; diese Aufgabe werde als Problem B bezeichnet. Ist K dieselbe Kurve wie im Problem A, so findet Steiner das bemerkenswerte Resultat, dass der Minimumpol T derselbe Punkt, und dass die Kurven Γ dieselben konzentrischen Kreise sind wie im Problem A. Jedoch übertrifft der Flächeninhalt der speziellen Rollkurve eines beliebigen Punktes P den kleinsten Flächeninhalt um die ganze Kreisfläche vom Radius PT. Der Flächeninhalt, den Steiner betrachtet, ist der Flächeninhalt erster Art. Bei einem einmaligen, vollständigen Abrollen ist derselbe aber gleich dem Flächeninhalt zweiter Art, so dass man für den letzteren die gleichen Resultate findet. Steiner untersucht auch die Eigenschaften des Minimumpols T und findet, dass derselbe kein anderer ist als der Krümmungsschwerpunkt S der Kurve K.

Unwillkürlich drängt sich die Frage auf, wie kommt es, dass die Probleme A und B nahezu dieselbe Lösung besitzen. Es erklärt sich durch eine einfache Beziehung, die zwischen den Flächeninhalten der Fusspunktkurve M und der speziellen

Rollkurve N derselben Kurve K hinsichtlich desselben Pols P besteht. Die Aufgabe, diese Beziehung zu finden, soll als Problem C bezeichnet werden. Steiner findet, dass der Flächeninhalt der Rollkurve doppelt so gross ist als der Flächeninhalt der Fusspunktkurve. Auch hier kann unter dem Flächeninhalt der Rollkurve sowohl der Flächeninhalt erster Art als auch der von zweiter Art verstanden werden.

Steiner geht dann über zur Betrachtung allgemeiner Rollkurven. Er lässt dabei schliesslich auch die Beschränkung fallen, dass die behandelten Kurven geschlossen sein sollen. Die Betrachtungen bleiben auch richtig, wenn die Kurven Doppelpunkte besitzen. Allerdings hat Steiner es nirgends ausgesprochen, dass die von ihm untersuchten Kurvenbogen solche singulären Punkte besitzen dürfen. Nur Wendepunkte werden ausdrücklich ausgeschlossen; selbstverständlich müssen die betrachteten Kurvenbogen auch stetig sein. Für die vorliegende Arbeit ist von diesen allgemeinen Untersuchungen nur eine Spezialisierung von Interesse, die Steiner erhält, indem er annimmt, dass die Direktrix eine Gerade ist.

Steiner löst das Problem B also auch für den Fall, dass K ein stetiger Kurvenbogen ohne Wendepunkte ist. Er findet, dass die ∞^1 Kurven Γ wieder konzentrische Kreise sind, dass ihr gemeinsamer Mittelpunkt der Minimumpol T ist, und dass der Flächeninhalt der speziellen Rollkurve eines beliebigen Punktes P den kleinsten Flächeninhalt um einen Kreissektor mit dem Radius PT und dem Drehungswinkel τ der Tangente längs des Bogens $k_1\ k_2$ als Zentriwinkel übertrifft. Unter dem Flächeninhalt ist hier der Flächeninhalt erster Art einer Rollkurve zu verstehen. Derselbe ist jetzt nicht mehr gleich dem Flächeninhalt zweiter Art, darf in obigem Resultat also auch nicht durch letzteren ersetzt werden.

In einer Anmerkung[1]) erwähnt Steiner, dass die im Problem C gefundene Lösung auch für einen stetigen Kurvenbogen $k_1\ k_2$ ohne Wendepunkte richtig sei. Damit übertrage sich die für

1) Crelles Journal, Band XXI, S. 122.

einen solchen Kurvenbogen beim Problem B gefundene Lösung auch auf Problem A; es sei nur der ganze Kreissektor durch den halben zu ersetzen. Ist S der Krümmungsschwerpunkt des Bogens $k_1\ k_2$ und l die Länge der Sehne $k_1\ k_2$, so findet man, wie Steiner beweist, jetzt den Minimumpol T, indem man von S auf $k_1\ k_2$ ein Lot fällt und auf dessen Verlängerung über S hinaus die Strecke $PT = \frac{l}{2 \cdot \tau}$ abträgt.

Steiner führt noch beiläufig[1]) an, dass man analoge Untersuchungen wie über die Flächeninhalte von Fusspunktkurven und Rollkurven auch über ihre Bogenlängen anstellen könne. Bei der Behandlung des Problems C für die Bogenlängen finde man, dass die Fusspunktkurve und die Rollkurve eines stetigen Kurvenbogens ohne Wendepunkte hinsichtlich desselben Poles P gleiche Bogenlänge besitzen.

An diese grundlegenden Untersuchungen Steiners knüpft eine ganze Reihe neuerer Arbeiten an. Im Jahre 1855 bewies Raabe[2]) analytisch, dass im Problem A für einen stetigen Kurvenbogen $k_1\ k_2$ ohne Wendepunkte die Kurven $\Gamma\,\infty^1$ coaxiale Ellipsen sind, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Minimumpol ist. Sehr eingehend behandelt Wetzig[3]) in einer im Jahre 1860 erschienenen Arbeit das Problem A. Er lässt auch die Beschränkung fallen, dass der Kurvenbogen $k_1\ k_2$ keine Wendepunkte besitzen darf; nur Unstetigkeiten werden ausgeschlossen. Wie bei Raabe sind die Kurven Γ dann ∞^1 coaxiale Ellipsen, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Minimumpol T ist. Dieselben gehen, wie Wetzig ausdrücklich beweist, nur dann in Kreise über, wenn man $k_1\ k_2$ durch eine geschlossene Kurve K ersetzt. Wetzig verallgemeinert ferner in der schon früher erwähnten Weise den Begriff Krümmungsschwerpunkt und zeigt, wie derselbe bei bekanntem Minimumpol gefunden werden kann und umgekehrt. Es zeigt sich, dass S und T von einem

1) Crelles Journal, Band XXI, S. 35.

2) Crelles Journal, Band L, S. 189—193.

3) Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band V, S. 1 und 81.

gewissen Ausnahmefall abgesehen nur bei einer geschlossenen Kurve K zusammenfallen.

Nach Steiners Untersuchungen müssten im Problem A die Kurven Γ auch dann Kreise sein, wenn man einen stetigen Kurvenbogen ohne Wendepunkte betrachtet, der nicht geschlossen ist. Wie Wetzig beweist, kann das jedoch nicht richtig sein. Wetzig gerät also in Widerspruch zu Steiners Angaben. Es ist leicht erklärlich, dass er das nicht bemerkt hat; denn diese entgegengesetzte Behauptung Steiners wird ja nur ganz kurz in einer Anmerkung ausgesprochen.

Aus der übrigen umfangreichen Litteratur kommen insbesondere noch zwei Arbeiten in Betracht, nämlich eine 1882 erschienene Abhandlung von Habich[1]) und eine 1890 erschienene von Ekama.[2]) Die erste dieser Abhandlungen ist dem Verfasser leider nicht zugänglich gewesen. In den „Fortschritten der Mathematik" wird jedoch der interessante Satz erwähnt, zu dem diese Arbeit gelangt, und es wird hinzugefügt, dass Habich aus demselben die Steinerschen Sätze über den Flächeninhalt und die Bogenlänge von Rollkurven ableite.

§ 3. Aufgabe und Inhalt der Arbeit.

In der vorliegenden Arbeit wird zuerst das Problem C behandelt, und zwar sowohl für die Flächeninhalte als auch für die Bogenlängen. Dies geschieht erstens deshalb, weil dieses Problem am leichtesten zu erledigen ist, und zweitens deshalb, weil von den Problemen A und B dann nur noch eins erörtert zu werden braucht. Bei den Bogenlängen ergiebt sich keine Abweichung von Steiner, wohl aber bei den Flächeninhalten. Betrachtet man nämlich die Fusspunktkurve und die spezielle Rollkurve eines Kurvenbogens $k_1\ k_2$ hinsichtlich desselben Pols P, so zeigt sich, dass der Flächeninhalt zweiter

1) Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg, Tome II, p. 145—148.

2) Grunerts Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reihe, Teil VIII, S. 388.

Art der Rollkurve gleich dem doppelten Flächeninhalt der Fusspunktkurve ist. Dieses Resultat steht wirklich in Widerspruch zu den Ergebnissen Steiners; denn nach Steiner müsste es sich nicht um den Flächeninhalt zweiter Art, sondern vielmehr um den Flächeninhalt erster Art handeln. Der Kurvenbogen $k_1\ k_2$ kann Doppelpunkte und Wendepunkte besitzen, er muss nur stetig sein.

Wie erklärt sich der Widerspruch zwischen den Resultaten Steiners einerseits und den hier und von Wetzig gefundenen andererseits? Diese Frage wird in dem nächsten Abschnitt beantwortet. Es stellt sich heraus, dass Steiners Sätze über die Flächeninhalte von Fusspunktkurven eben zum Teil nicht richtig sind. Es wird dargelegt, worin Steiners Irrtum besteht, und wie man Steiners Betrachtungen abändern muss, um das richtige Resultat zu finden.

Der folgende Abschnitt ist einer eingehenden Untersuchung des Problems *A* über die Flächeninhalte von Fusspunktkurven gewidmet. Er besteht im Wesentlichen aus einem übersichtlichen Auszug aus Wetzigs Arbeiten über den gleichen Gegenstand; es sind nur einzelne Punkte verbessert oder genauer ausgeführt. Auch wird die Beziehung zwischen dem Krümmungsschwerpunkt *S* und dem Minimumpol *T* untersucht. Als Beispiel wird die Hyperbel behandelt; es ergiebt sich ein Resultat, welches Steiners Satz über die Hyperbel widerspricht. Es wird gezeigt, worin Steiners Irrtum in diesem Falle besteht, und wie Steiners Satz verstanden werden muss, wenn er trotzdem einen Sinn haben soll.

In einem fünften und letzten Abschnitt wird noch darauf hingewiesen, dass man zu den Problemen der Vergleichung der ∞^2 Fusspunktkurven oder Rollkurven einer gegebenen Kurve eine unendliche Reihe analoger Probleme aufstellen kann, und dass man gewisse Klassen solcher Probleme ohne jede Rechnung sofort erledigen kann.

II. Die Beziehung zwischen den Fusspunktkurven und den speciellen Rollkurven einer und derselben Kurve.

§ 1. Analytische Ableitung der Beziehung.

Die Kurve K rolle auf der Geraden G. Bei der in Figur 2 gezeichneten Lage möge sie sich von der Anfangslage aus um den Winkel φ gedreht haben. Ist nun P der beschreibende Punkt, so machen wir P zum Anfangspunkte eines mit K fest verbundenen Koordinatensystems x, y, dessen $+x$-Axe mit dem Lot PQ von P auf die Gerade G in der gezeichneten Lage von K den Winkel φ bildet. Denken wir uns dann die Kurve K um den Winkel φ zurückgerollt, so wird die $+x$-Axe auf G senkrecht stehen. Den Schnittpunkt der Geraden G mit der $+x$-Axe bei dieser Lage machen wir zum Anfangspunkt O eines festen Koordinatensystems ξ, η, dessen $+\xi$-Axe die Gerade G ist.

In der gezeichneten Lage von K seien ξ, η die Koordinaten von P in Bezug auf das feste Koordinatensystem. Die Koordinaten des jeweiligen Berührungspunktes A von K und G in Bezug auf das bewegliche Koordinatensystem seien x, y. Ist in der Anfangslage der Abstand des Berührungspunktes A von O gleich ξ_0 und der während der Bewegung abgerollte Bogen von K gleich s, so wird gegenwärtig $OA = \xi_0 + s$ sein. Aus der Figur ergeben sich daher die Beziehungen:

$$1) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + s + x \cdot \sin\varphi - y \cdot \cos\varphi \\ \eta &= x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi. \end{aligned}$$

Sind x, y und φ als Funktionen eines Parameters t gegeben, so bestimmen diese Gleichungen auch ξ, η als Funktionen desselben Parameters. Insbesondere kann φ selbst als Parameter gewählt werden.

Bei dieser Auffassung folgt aus der ersten Gleichung 1)

$$d\xi = ds + \sin\varphi \cdot dx - \cos\varphi \cdot dy + (x\cos\varphi + y\sin\varphi) \cdot d\varphi$$

oder unter Benutzung der zweiten Gleichung 1)

$$d\xi = ds + \sin\varphi \cdot dx - \cos\varphi \cdot dy + \eta \cdot d\varphi.$$

Die Bogenlänge s der Kurve K kann nun als Funktion von x, y betrachtet werden; daher wird:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot dy = cos\,(sx) \cdot dx + cos\,(sy) \cdot dy$$

oder, da $(sx) = \frac{\pi}{2} + \varphi$ und $(sy) = \varphi$ ist,

$$ds = -\sin\varphi \cdot dx + \cos\varphi \cdot dy.$$

Infolge dessen ergiebt sich

$$d\xi = \eta \cdot d\varphi.$$

Wird für η auch r geschrieben, so findet man also

$$2)\quad \eta \cdot d\xi = r^2 \cdot d\varphi \qquad d\xi^2 + d\eta^2 = r^2 \cdot d\varphi^2 + dr^2.$$

Rollt die Kurve K aus ihrer Anfangslage um einen Bo n fort, der einem Wachstum des Winkels φ von 0 bis $\overline{\varphi}$ entspricht, und wird die Fläche zweiter Art der entstehenden Rollkurve mit N_2 und ihre Bogenlänge mit n bezeichnet, so ist:

$$N_2 = \int_0^{\overline{\varphi}} \eta \cdot d\xi \qquad n = \int_0^{\overline{\varphi}} \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi.$$

Wie die Figur lehrt, sind r und φ nichts anderes als die Polarkoordinaten der Fusspunktkurve von K hinsichtlich P. Ist M der Flächeninhalt des einem Wachsen von o bis $\overline{\varphi}$ entsprechenden Fusspunktbogens und m seine Länge, so ist also:

$$M = \tfrac{1}{2} \int_0^{\overline{\varphi}} r^2 \cdot d\varphi \qquad m = \int_0^{\overline{\varphi}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 2) ergiebt sich also:

$$3)\quad 2M = N_2 \quad . \quad m = n.$$

Damit haben wir die folgenden beiden Sätze erhalten:

Theorem I: Rollt ein stetiger Kurvenbogen $k_1\ k_2$ auf einer Geraden, so ist die Fläche zweiter Art der von einem mit $k_1\ k_2$ fest verbundenen Punkte P beschriebenen Rollkurve gleich der doppelten Fläche des Fusspnnktbogens von $k_1\ k_2$ hinsichtlich P.

Theorem II: Die Rollkurve und die Fusspunktkurve eines stetigen Kurvenbogens $k_1\ k_2$ hinsichtlich desselben Punktes P haben gleiche Bogenlänge.

Da die Formeln 2) nur dann ihre Bedeutung verlieren, wenn die Kurve K unstetig ist, so ist klar, dass bei diesem Beweise Doppelpunkte und Wendepunkte von k_1 k_2 nicht ausgeschlossen sind.

§ 2. Einige Hülfssätze.

Gleitet eine Ebene E' auf einer festen Ebene E, so beschreibt irgend ein mit E' fest verbundener Punkt in E eine Kurve N. Wie in der Kinematik gezeigt wird, ist diese sogenannte Bewegung zweier starrer Systeme gegen einander äquivalent mit dem Rollen der Polkurve K' auf der Polkurve K. Daraus folgt, dass jede beliebige Kurve N als Rollkurve erzeugt werden kann, und zwar auf unendlich viele Weisen, da es unendlich viele Bewegungen starrer Systeme giebt, bei denen in E dieselbe Kurve N entsteht.

Konstruieren wir zu einer Kurve K die Fusspunktkurve M, so kann also auch M auf unendlich viele Weisen als Rollkurve aufgefasst werden. Für das Folgende ist eine besondere Art von Interesse, die schon Steiner[1]) kurz angegeben hat, und die Raabe[2]) und Ekama[3]) auch analytisch begründen. Diese Erzeugungsart lässt sich in folgendem Satz aussprechen:

Hülfssatz 1: Rollt eine Kurve K anf einer mit ihr kongruenten Kurve K' so, dass K' stets das Spiegelbild von K hinsichtlich der Tangente des Berührungspunktes ist, so ist die von einem mit K fest verbundenen Punkt P beschriebene Rollkurve kongruent mit der Kurve, welche aus der Fusspunktkurve von K hinsichtlich P hervorgeht, wenn man alle radien vectoren verdoppelt.

In der Figur 3 sollen K und K' die auf einander rollenden, kongruenten, zur Tangente des Berührungspunktes A symmetrisch gelegenen Kurven darstellen. Ist P der beschreibende Punkt, so konstruieren wir den entsprechenden Punkt P' in Bezug

1) Crelles Journal, Band XXI, S. 132.

2) Crelles Journal, Band XLVIII, S. 105.

3) Grunerts Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reihe, Teil VIII, S. 416.

auf K', d. h. wir fällen von P auf die Tangente des Punktes A das Lot PB und tragen auf der Verlängerung desselben über B hinaus $BP' = PB$ ab. Dann ziehen wir $P'A$ und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Geraden und des auf PP' in P errichteten Lotes mit C. Da $PB = BP'$ und $PC \parallel BA$, so ist auch $CA = AP'$. Führt man nun von P' aus eine Ähnlichkeitstransformation im Verhältnis 1 : 2 aus, so geht also A in C, B in P und AB in CP über. Nun ist B ein Punkt der Fusspunktkurve von K' hinsichlich P', also P ein Punkt der zweimal vergrösserten Fusspunktkurve. Gleiches gilt für alle anderen Lagen der Kurve K. Der Ort der Punkte P ist also einmal die beim Rollen von K auf K' entstehende Rollkurve und andererseits auch die Kurve, welche aus der Fusspunktkurve von K' hinsichtlich P' hervorgeht, wenn man alle radien vectoren verdoppelt. Da nun K mit K' kongruent ist, und P zu K dieselbe Lage hat wie P' zu K', so ist auch die Fusspunktkurve von K hinsichtlich P kongruent mit der Fusspunktkurve von K' hinsichtlich P'; dasselbe muss auch noch gelten, wenn man die radien vectoren der beiden Fusspunktkurven verdoppelt. Es ist nur eine Umklappung um die Tangente des Punktes A nötig, um die beiden Kurven zur Deckung zu bringen.

Wie schon Raabe anführt, kann man aus der Figur 3 sogleich einen zweiten Satz folgern. Zieht man AP, so ist diese Gerade Normale der entstehenden Rollkurve, weil A momentanes Drehcentrum ist. Wie wir gesehen haben, geht aber die Kurve der Punkte P aus der Fusspunktkurve von K' hinsichtlich P' hervor, wenn man alle radien vectoren verdoppelt, oder, was dasselbe ist, die Kurve der Punkte P ist selbst die Fusspunktkurve hinsichtlich P' von der Kurve K'', welche aus K' hervorgeht, wenn man alle radien vectoren verdoppelt. Das liefert die in folgendem Satz ausgesprochene, bekannte Normalenkonstruktion der Fusspunktkurven:

Hülfssatz 2: Verbindet man einen Punkt M_1 der Fusspunktkurve M einer Kurve K hinsichtlich eines Punktes P mit dem Mittelpunkt des zugehörigen radius vector von K, so ist diese

Verbindungslinie die Normale der Fusspunktkurve M im Punkte M_1.

Errichten wir jetzt noch auf AP im Punkte P ein Lot PD, so ist PD die Tangente der Fusspunktkurve von K'' in diesem Punkte, da ja PA die Normale ist. Wie man leicht sieht, ist

$$\angle APP' = AP'P; \text{ daher wird}$$

$$\angle P'PD = \frac{\pi}{2} - APP' = \frac{\pi}{2} - AP'P = P'CP.$$

Nun ist C der dem Punkt A entsprechende Punkt von K'' und CP die Tangente von K'' im Punkte C. Damit hat man den bekannten Satz erhalten:

Hülfssatz 3: Konstruiert man zu einer Kurve K die Fusspunktkurve M hinsichtlich eines Punktes P, so ist der Winkel zwischen der Tangente und dem radius vector eines Punktes von M gleich dem Winkel zwischen der Tangente und dem radius vector des entsprechenden Punktes von K.

§ 3. Geometrische Ableitung der Beziehung aus den Sätzen von Ekama.

Rollt eine Kurve K auf einer Kurve K' fort, so ist die Verbindungslinie des augenblicklichen Berührungspunktes von K und K' und eines mit K fest verbundenen Punktes P in jedem Moment die Normale der von P erzeugten Rollkurve N. Rollt nun K um ein unendlich kleines Stück fort, so kann der Übergang der Normale aus einer Lage in die unendlich benachbarte auch durch zwei successive, infinitesimale Rotationen bewerkstelligt werden, nämlich durch eine Rotation um den beschreibenden Punkt P und eine darauf folgende Rotation um das bei der unendlich kleinen Rollung auftretende momentane Drehcentrum. Je nachdem diese Rotationen in entgegengesetztem oder gleichem Sinne erfolgen, muss man die durch dieselben erzeugten Sektoren addieren oder subtrahieren, um jenes viereckige Flächenelement der Rollkurve zu erhalten. Da nun die endliche Rollung aus solchen unendlich kleinen Rollungen

zusammengesetzt werden kann, und die durch die erstere Art von Rotationen beschriebenen Sektoren sich zu einem Sektor K der Kurve K addieren, so findet man folgenden

Satz von Gilbert[1]**:** Ein stetiger Bogen $k_1 k_2$ einer Kurve K rolle auf einem stetigen Bogen $k'_1 k'_2$ einer Kurve K' ab, und es sei N_1 der Flächeninhalt erster Art der dabei von einem mit K fest verbundenen Punkt P beschriebenen Rollkurve, K der Inhalt des Sektors $Pk_1 k_2$ und I der Inhalt des entsprechenden Sektors einer Kurve, die man erhält, wenn man als radius vector die Verbindungslinie von P mit dem jeweiligen Berührungspunkt von K und K' und als Polwinkel den Winkel nimmt, um den sich K gedreht hat, um aus der ursprünglichen Lage in die eben betrachtete zu gelangen. Dann ist $N_1 = K + I$, wenn man das Flächenstück I positiv oder negativ rechnet, je nachdem die Rotation der Normalen in der beweglichen Figur und ihre Rotation um das momentane Drehcentrum der Rollung in entgegengesetztem oder gleichem Sinne erfolgen.

Bezeichnet man die Verbindungslinie von P mit dem augenblicklichen Berührungspunkt A durch r, die Kontingenzwinkel von K und K' im Punkte A, die dem gleichen Bogenelement $ds = ds'$ entsprechen, mit $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ und die Krümmungsradien mit ϱ und ϱ', so ist

$$d\vartheta = \frac{ds}{\varrho} \text{ und } d\vartheta' = \frac{ds'}{\varrho'} = \frac{ds}{\varrho'}.$$

Lässt man zunächst zwei Bogen von K und K', die keine Wendepunkte besitzen, mit ihrer konvexen Seite auf einander rollen, so dass ϱ und ϱ' entgegengesetzte Richtung haben, so erfolgen die Rotationen der Normale um P und um das momentane Drehcentrum der Rollung in entgegengesetztem Sinne. In der Gilbertschen Relation $N = K + I$ ist also

$$I = +\tfrac{1}{2}\int r^2 (d\vartheta + d\vartheta') = \tfrac{1}{2}\int r^2 \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) \cdot ds.$$

---

1) Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles, tome XXX. Recherches sur les propriétés des mouvements plans, présentés à l'Académie le 7 novembre 1857.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt erster Art dieser Rollkurve jetzt mit N_a, so haben wir:

$$4)\quad N_a = K + I = K + \tfrac{1}{2}\int r^2\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)\cdot ds.$$

Rollt K auf der anderen Seite von K', so erfolgen beide Rotationen der Normalen in entgegengesetztem oder gleichem Sinne, je nachdem

$d\vartheta > d\vartheta'$ oder $d\vartheta < d\vartheta'$, d. h. je nachdem

$\varrho' > \varrho$ oder $\varrho' < \varrho$

ist. Im ersteren Falle ist also I positiv zu rechnen, so dass

$$I = +\tfrac{1}{2}\int r^2(d\vartheta - d\vartheta') = +\tfrac{1}{2}\int r^2\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)ds \text{ ist.}$$

Im zweiten Falle ist I negativ zu rechnen; dann wird also

$$I = -\tfrac{1}{2}\int r^2(d\vartheta' - d\vartheta) = +\tfrac{1}{2}\int r^2(d\vartheta - d\vartheta') = +\tfrac{1}{2}\int r^2\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\cdot ds.$$

Bezeichnen wir die Fläche erster Art der Rollkurve, welche sich bei dieser Rollung ergiebt mit N_i, so ist also in beiden Fällen:

$$5)\quad N_i = K + I = K + \tfrac{1}{2}\int r^2\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\cdot ds.$$

Diese Formeln, die den Ausdruck des Gilbertschen Satzes bilden, finden sich schon bei Steiner; Steiner setzt nur[1])

$W = K + \tfrac{1}{2}\int r^2 \cdot d\vartheta \qquad T = \tfrac{1}{2}\int r^2 \cdot d\vartheta'$, so dass

$N_a = W + T$ und $N_i = W - T$ wird.

Gerade diese Steinersche Form der Gleichungen 4) und 5) legt die Addition derselben nahe; man erhält dadurch:

$$6)\quad N_a + N_i = 2 \cdot W = 2 \cdot K + \int \frac{r^2}{\varrho}\cdot ds.$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Summe $N_a + N_i$ unabhängig ist von der Kurve K'. Sie wird sich also nicht ändern, wenn man K auf einer andern Kurve K' um dieselbe Strecke fort-

1) Steiners Werke, Band II, S. 139 und 140, Formel 96, 97 und 101.

rollen lässt. Diese Überlegungen hat erst Ekama ausgeführt und dieselben in folgendem Satze ausgesprochen[1]):

1. Satz von Ekama: Die Summe der Flächen erster Art der Rollkurven, welche derselbe Punkt P beschreibt, wenn eine Kurve K, mit der er fest verbunden ist, einmal äusserlich und einmal innerlich auf einer Kurve K' um denselben Bogen fortrollt, ist unabhängig von der gewählten Kurve K'.

Besitzen die Kurven K und K' Wendepunkte, so wird sich bei jedem Wendepunkt allerdings das Verhältnis von N_a und N_i vertauschen; das Resultat der Summation wird aber doch dasselbe bleiben, so dass den Kurven K und K' im Ekamaschen Satze nur die Beschränkung der Stetigkeit aufzuerlegen ist.

Besitzen die aufeinander rollenden Bogen keine Wendepunkte, und ist n_a die Bogenlänge der bei äusserem Rollen und n_i die Bogenlänge der bei innerem Rollen entstehenden Rollkurve, so ist

$$7)\quad n_a = \int r\,(d\vartheta + d\vartheta')$$

$$8)\quad n_i = \int r\,(d\vartheta - d\vartheta').$$

Rechnet man n_i negativ, sobald die Rotationen der Normale um P und um das momentane Drehcentrum in gleichem Sinne erfolgen, so ist also stets:

$$9)\quad n_a + n_i = 2\cdot\int r\,.\,d\vartheta = 2\cdot\int \frac{r}{\varrho}\cdot ds.$$

Diese Formel ist allgemein gültig, da bei der Existenz von Wendepunkten die Formeln für n_a und n_i zwar an jedem Wendepunkte ihre Rolle tauschen, das Resultat der Addition dadurch aber nicht geändert wird. Es gilt also der

2. Satz von Ekama: Die Summe der Bogenlängen der Rollkurven, welche ein mit einer Kurve K fest verbundener Punkt P beschreibt, wenn dieselbe einmal auf der einen Seite und einmal auf der anderen Seite einer stetigen Kurve K' um denselben Bogen fortrollt, ist unabhängig von der Kurve K'.

1) Grunerts Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reihe, Teil VIII, S. 393.

Der erste Satz von Ekama bezieht sich auf den Flächeninhalt erster Art. Von demselben unterscheidet sich der Flächeninhalt zweiter Art nur um die Differenz zweier gewissen Dreiecke. Wie man leicht erkennt, ist der Inhalt dieser Dreiecke aber gleichfalls unabhängig von der Kurve K'. Daher folgt aus dem ersten Ekamaschen Satze der

Satz: Die Summe der Flächen zweiter Art der Rollkurven, welche ein mit einer stetigen Kurve K fest verbundener Punkt P beschreibt, wenn dieselbe einmal äusserlich und einmal innerlich um denselben Bogen auf einer stetigen Kurve K' fortrollt, ist unabhängig von der Kurve K'.

Mit Hülfe dieses Satzes und des zweiten Satzes von Ekama kann man nun leicht die in diesem Abschnitte behandelte Beziehung finden. Ein stetiger Kurvenbogen $k_1\ k_2$ möge zunächst auf beiden Seiten einer Geraden G rollen. Bezeichnet man den Flächeninhalt zweiter Art der entstehenden Rollkurven mit N_2 und ihre Bogenlänge mit n, so ist die Summe der beiderseitigen Flächen gleich $2 \cdot N_2$ und der beiderseitigen Bogen $2 \cdot n$. Darauf möge der Kurvenbogen $k_1\ k_2$ einmal äusserlich und einmal innerlich auf einem kongruenten Kurvenbogen in symmetrischer Lage rollen. Ist N'_2 die Summe der Flächeninhalte zweiter Art und n_1 die Summe der Bogenlängen der beiden Rollkurven, so ist infolge der soeben bewiesenen Sätze:

$$10)\quad 2 \cdot N_2 = N'_2 \qquad 2 \cdot n = n'.$$

Bei dem innerlichen Rollen unserer kongruenten Bogen aufeinander entsteht nun gar keine Kurve, da überhaupt keine Rollung möglich ist. Beachtet man die aus Formel 5) für diesen Fall sich ergebende Bedeutung von N_i, so ist also in Figur 4:

$$N'_2 = PP'P'P \qquad n' = P'P'.$$

Bezeichnet man den Flächeninhalt des Fusspunktbogens von AB resp. $k_1\ k_2$ hinsichtlich P mit M und seine Länge mit m, so ist vermöge des Hülfssatzes 1:

$$11)\quad N'_2 = PP'P'P = 4 \cdot M \qquad n' = P'P' = 2 \cdot m.$$

Aus den Gleichungen 10) und 11) erhält man wieder die Gleichungen: 3) $2 \cdot M = N_2$, $m = n$. Damit sind die Theoreme I und II auf andere Art bewiesen.

Auf die Relation $2n = n'$ macht schon Ekama aufmerksam. Er kennt auch den hier benutzten Hülfssatz 1, hat aber trotzdem nicht bemerkt, dass dann nur noch ein kleiner Schritt zu thun ist, um die Steinerschen Sätze zu erhalten.

§ 4. Geometrische Ableitung der Beziehung nach Habich.

Um den Satz von Habich abzuleiten, möge eine auf einer Geraden G rollende Kurve K in irgend einer Lage betrachtet werden (Figur 5). Man verbinde den augenblicklichen Berührungspunkt A mit dem erzeugenden Punkte P und fälle von P auf G das Lot PB. Dann ist B der der augenblicklichen Lage von P auf der Rollkurve entsprechende Punkt der Fusspunktkurve von K hinsichtlich P. Halbiert man AP in C und zieht BC, so ist nach dem Hülfssatze 2 BC die Normale dieser Fusspunktkurve im Punkte B; ferner ist PC die Normale der Rollkurve im Punkte P. Werden auf BC in B und auf PC in P die Lote BD und PE errichtet, so sind dieselben daher Tangenten der Fusspunktkurve M und der Rollkurve N von K in einander entsprechenden Punkten. Entsprechende Punkte von M und N sind dabei solche, die demselben Punkte A von K zugeordnet sind. Zieht man durch C eine Parallele zu G und klappt die Figur um dieselbe herum, so fällt, da $CP = CB$ und $\angle EPB = DPB$ ist, der Punkt B so auf die ursprüngliche Lage des Punktes P, dass die Fusspunktkurve und die Rollkurve sich in diesem Punkte berühren; der Punkt P hingegen wird aus seiner ursprünglichen Lage in den auf G gelegenen Punkt B übergeführt. In jeder anderen Lage von K besteht eine analoge Zuordnung zwischen den dem augenblicklichen Berührungspunkte zugeordneten Punkten der Fusspunktkurve und der Rollkurve. Sind B und P einander entsprechende Punkte, so fällt also der erzeugende Punkt stets in die Gerade G, wenn man M in eine solche Lage gegen N bringt, dass B auf den früheren Ort des Punktes P fällt, und dass M und N sich in diesem Punkte innerlich berühren.

Den unendlich benachbarten Punkten A_1 und A_2 von K seien nun auf M die Punkte B_1 und B_2 und auf N die Punkte P_1 und P_2 zugeordnet; dann sind B_1 und P_1, sowie B_2 und P_2 Punkte, die im Sinne des obigen Resultates entsprechende Punkte genannt werden. Kann man dann zeigen, dass $B_1B_2 = P_1P_2$ ist, so ist klar, dass der Übergang aus der berührenden Lage von M und N in B_1 und P_1 zur Berührung in B_2 und P_2 durch eine Rollung von M auf N bewerkstelligt werden kann.

Die Gleichheit dieser Bogenelemente ist im Vorhergehenden bereits analytisch bewiesen worden. Die zweite Gleichung 2) auf Seite 11 spricht das gewünschte Resultat schon aus. Man kann dasselbe aber auch leicht geometrisch finden. In Figur 6 ist die Kurve K so gezeichnet, dass A_1 der augenblickliche Berührungspunkt mit der Geraden G ist, der erzeugende Punkt P befindet sich dabei in der Lage P_1. Dreht sich K so weit um A_1, dass $A_1A_2 = ds$ auf G fällt, so gelangt P in die Lage P_2. Der Winkel, um den sich K dabei gedreht hat, ist gleich dem Winkel zweier aufeinander folgender Bogenelemente ds von K, d. h. gleich dem sogenannten Kontingenzwinkel $d\vartheta$. Bezeichnet man $A_1P_1 = A_1P_2$ mit r, so ist also

$$P_1P_2 = r \cdot d\vartheta.$$

Die Figur 7 zeigt die Kurve K mit den Tangenten in den unendlich benachbarten Punkten A_1 und A_2. Von P sind auf dieselben die Lote PB_1 und PB_2 gefällt. Dann ist $\angle B_1A_1B_2 = d\vartheta$. Da $PB_1B_2A_1$ ein Sehnenviereck ist, so muss $\angle A_1B_1B_2 = A_1PB_2$ sein. Aus dem Dreiecke $A_1B_1B_2$ findet man:

$$B_1B_2 : \sin d\vartheta = A_1B_2 : \sin A_1B_1B_2,$$

und aus dem Dreiecke A_1PB_2 ergiebt sich:

$$A_1B_2 = A_1P \cdot \sin A_1PB_2,$$

oder, wenn man A_1P wieder mit r bezeichnet:

$$A_1B_2 = r \cdot \sin A_1PB_2.$$

Setzt man das ein, so erhält man:

$$B_1B_2 = r \cdot \sin d\vartheta.$$

Unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von höherer Ordnung ist nun $\sin d\vartheta = d\vartheta$. Demnach ergiebt sich:

$$P_1P_2 = B_1B_2 = r \cdot d\vartheta.$$

Fasst man diese Betrachtungen zusammen, so kann man dieselben in folgendem Satze aussprechen:

Satz von Habich: Rollt eine ebene Kurve K auf einer Geraden G und beschreibt dabei ein mit K fest verbundener Punkt P die Rollkurve N, so beschreibt P, wenn die Fusspunktkurve M von K in Bezug auf den Punkt P auf N rollt, die Gerade G.

Dass aus diesem Satze das Theorem II gefunden werden kann, bedarf keiner Erörterung; denn man muss dasselbe ja mitbeweisen, wenn man den Satz von Habich erhalten will. Aber auch das Theorem I lässt sich aus diesem Satze folgern. Man denke sich M innerlich auf N rollend und bezeichne wie gewöhnlich den Flächeninhalt der Fusspunktkurve mit M und den Flächeninhalt zweiter Art der Rollkurve mit N_2. Sind $d\vartheta'$ resp. $d\vartheta''$ die Kontingenzwinkel der Rollkurve resp. der Fusspunktkurve in entsprechenden Punkten, so ist nach Formel 5) Seite 16:

$$N_2 = M + \tfrac{1}{2}\int r^2 (d\vartheta' - d\vartheta'').$$

Bezeichnet man in Figur 5 den Winkel PAB mit α und den Winkel, den die Tangente PE der Rollkurve mit G bildet, mit β, so ist

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \text{ also } d\beta = -d\alpha.$$

Nun ist $d\beta$ aber nichts Anderes als der Kontingenzwinkel $d\vartheta'$, daher

$$d\vartheta' = -d\alpha.$$

Dann ziehe man von P aus irgend eine Gerade, die man sich mit K fest verbunden denken möge. Ist F der Schnittpunkt derselben mit BD, und bezeichnet man den Winkel PFB mit γ und den Winkel BPF mit φ, so ist

$$\gamma = \pi - (\varphi + \alpha);$$

denn nach Hülfssatz 3 ist

$$\angle PBF = PAB = \alpha.$$

Da nun $d\gamma$ gleich dem Kontingenzwinkel $d\vartheta''$ von M sein muss, so ergiebt sich:

$$d\vartheta'' = d\gamma = -d\varphi - d\alpha. \qquad d\vartheta' = -d\alpha, \text{ also}$$
$$d\vartheta' - d\vartheta'' = d\varphi.$$

Demnach wird

$$\tfrac{1}{2}\int r^2(d\vartheta' - d\vartheta'') = \tfrac{1}{2}\int r^2 \cdot d\varphi = M, \text{ also}$$
$$N_2 = 2 \cdot M.$$

§ 5. Über die geometrische Bedeutung und die Berechnung der vorkommenden Integrale.

Es fragt sich, was unter den vorkommenden Integralen geometrisch zu verstehen ist, wenn die Fusspunktkurven oder Rollkurven irgend eine komplizierte Gestalt annehmen. Die Antwort auf diese Frage giebt für Integrale der Form $\int r^2 \cdot d\varphi$ die folgende Regel von Gauss (Fig. 8):

Regel von Gauss: Ist die begrenzende Kurve geschlossen und durchschneidet sich mehrfach, so versehe man, wenn der Pfeil den Integrationssinn andeutet, die einzelnen Flächenstücke in der Weise mit Koefficienten, dass man dem Aussenraume den Koeffizienten 0 und zwei an einander angrenzenden Flächenstücken um 1 verschiedene Koefficienten giebt, so dass das rechts vom Pfeil befindliche Flächenstück den kleineren Koeffizienten besitzt, wenn man auf der Kurve stehend im Pfeilsinne blickt. Das Integral ist dann gleich der algebraischen Summe der einzelnen Flächenstücke, wenn man jedes Flächenstück vorher mit dem ihm zugeordneten Koefficienten multipliziert.

Diese Regel giebt uns unmittelbar die Bedeutung der Fusspunktflächen auch bei komplizierten Formen derselben an. Ist die gegebene Kurve K geschlossen, so ist die Fusspunktkurve ebenfalls geschlossen. Bei Betrachtung der Fusspunktfläche eines Kurvenbogens $k_1\ k_2$ hinsichtlich eines Punktes P hat man die Endpunkte des Fusspunktbogens von $k_1\ k_2$ mit P zu verbinden und die Gauss'sche Regel auf den dadurch entstehenden geschlossenen Linienzug anzuwenden.

Bei den Rollkurven hat man eigentlich Integrale von der Form $\int y \cdot dx$. Wenn man sich aber vorstellt, dass man um die ganze Begrenzungslinie herum integriert, indem man dabei irgend einen Punkt der Ebene als Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems betrachtet, so ist klar, dass damit diese selbe Fläche durch ein Integral der Form $\int r^2 \cdot d\varphi$ ausgedrückt wird. Die

Gauss'sche Regel liefert also auch hier die geometrische Bedeutung der Flächen, wenn man nur jedes Mal in richtiger Weise einen geschlossenen Linienzug herstellt, was bei der Fläche zweiter Art einer Rollkurve, die entsteht, wenn ein Kurvenbogen k_1 k_2 auf einer Geraden G rollt, so zu geschehen hat, wie die Figur 9 zeigt.

Die Anwendbarkeit der Gauss'schen Regel wird durch Ecken oder Spitzen, die an den Begrenzungslinien auftreten, in keiner Weise beeinträchtigt. Doch muss auf solche Spitzen und Ecken deshalb geachtet werden, weil sie bei der Berechnung der vorkommenden Integrale eine Zerlegung derselben nötig machen. Wetzig betrachtet zwei Fälle, wo solche Zerlegungen bei Fusspunktkurven nötig werden. Den Wendepunkten von K entsprechen nämlich Spitzen von M, und zwar solche Spitzen, bei denen beide Kurvenzweige nach derselben Seite hin gekrümmt sind. Diese Spitzen machen natürlich eine Zerlegung notwendig. Eine Zerlegung wird auch dann erforderlich, wenn sich von P aus eine Tangente an K ziehen lässt; alsdann geht M durch P hindurch. Doch ist die Notwendigkeit dieser Zerlegung dem Umstand zuzuschreiben, dass durch die Verbindungslinien von P mit den Endpunkten des Fusspunktbogens bei P Ecken auftreten. Lassen sich von P aus ν Tangenten an K ziehen, so wird P ein ν-facher Punkt von M. Liegt P auf K, so wird P eine Spitze von M, in deren Nähe beide Kurvenzweige nach entgegengesetzten Seiten gekrümmt sind.

Analoge Erscheinungen treten bei den Rollkurven N auf, Wendepunkten von K entsprechen wieder Spitzen der ersten Art; Spitzen der zweiten Art treten auf, wenn P auf K liegt. Jeder Tangente, die sich von P an K ziehen lässt, entspricht ein Schnittpunkt von N mit der Geraden G. Bei der analytischen Ausrechnung der Integrale muss man also die Wendepunkte von K und die Tangenten bestimmen, die sich etwa von P aus an K ziehen lassen.

Was die Berechnung der Integrale für die Bogenlängen anbelangt, so sind dabei nur die Spitzen der Kurven M und N zu beachten. Solche treten auf, wenn K Wendepunkte besitzt, oder wenn P auf K liegt. Die geometrische Bedeutung der

Bogenlänge in diesen Fällen erkennt man leicht aus der Gleichung

$$P_1 P_2 = B_1 B_2 = r \cdot d\vartheta$$

von Seite 20. Dieselbe lehrt, dass die Bogenlänge an den Spitzen der ersten Art, welche Wendepunkten von K entsprechen, ihr Vorzeichen ändert, jedoch nicht an den Spitzen der zweiten Art.

III. Der Irrtum Steiners in seinen Betrachtungen über die Fusspunktkurven.

§ 1. Der Fehler in Steiners Betrachtungen.

Betrachtet man das Theorem I, das sich bei drei verschiedenen Ableitungen immer wieder bestätigt gefunden hat, so zeigt sich in der That, dass dasselbe zu Steiners Ergebnissen in Widerspruch steht. Denn nach Steiner ist der doppelte Flächeninhalt der Fusspunktkurve gleich dem Flächeninhalt erster Art der Rollkurve, nach diesem Resultate aber gleich dem Flächeninhalte zweiter Art. Diese beiden Flächeninhalte einer Rollkurve sind aber im Allgemeinen verschieden.

Dieser Widerspruch beruht auf einem Irrtum, der Steiner widerfahren ist. Um das zu zeigen, werden zunächst Steiners Betrachtungen hier wiedergegeben. Steiner zeichnet (Figur 10) ein konvexes Vieleck $ABCD\ldots$, fällt von einem Punkte P auf die Seiten desselben die Lote PA_1, PB_1, PC_1 ... und bezeichnet das Vieleck $A_1B_1C_1\ldots$ als das Fusspunktenvieleck von $ABCD\ldots$ hinsichtlich des Punktes P. Ferner werden PA, PB, $PC\ldots$ mit a, b, $c\ldots$ und die Aussenwinkel des Vielecks mit α, β, $\gamma\ldots$ bezeichnet. Diese Aussenwinkel sind gleich gewissen Winkeln bei P, so ist der Aussenwinkel bei B gleich $\angle A_1PB_1$. Bezeichnet man noch $\angle A_1PB$ mit μ und $\angle B_1PB$ mit ν, so ist:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot A_1PB_1 - A_1PB_1B = A_1PB_1 - A_1BB_1 \\
&= \tfrac{1}{2}\, PA_1 \cdot PB_1 \cdot \sin\beta - \tfrac{1}{2}\, BA_1 \cdot BB_1 \cdot \sin(\pi - \beta) \\
&= \tfrac{1}{2} \sin\beta\ (PA_1 \cdot PB_1 - BA_1 \cdot BB_1) \\
&= \tfrac{1}{2} \sin\beta\ (b \cdot \cos\mu \cdot b \cdot \cos\nu - b \cdot \sin\mu \cdot b \cdot \sin\nu) \\
&= \tfrac{1}{2}\, b^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{4}\, b^2 \cdot \sin 2\beta \\
&\qquad 2 \cdot A_1PB_1 - A_1PB_1B = \tfrac{1}{4}\, b^2 \cdot \sin 2\beta.
\end{aligned}$$

Man erhält eine fortlaufende Reihe analoger Gleichungen und durch Addition derselben:

$$2 \cdot \Sigma A_1 P B_1 - \Sigma A_1 P B_1 B = \tfrac{1}{4} \Sigma b^2 \cdot \sin 2\beta.$$

Bezeichnet man einander entsprechende Sektoren des gegebenen Vielecks und des Fusspunktvielecks mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$, so ist also:

$$1) \quad 2 \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{K} + \tfrac{1}{4} \cdot \Sigma b^2 \cdot \sin 2\beta.$$

Werden die Seiten des gegebenen Vielecks unendlich klein, so geht dasselbe in eine Kurve K über, die Strahlen a, b, c ... in die radien vectoren r derselben und die Winkel α, β, γ ... in ihre Kontingenzwinkel $d\vartheta$. Werden entsprechende Sektoren von K und seiner Fusspunktkurve hinsichtlich P wieder mit K und M bezeichnet, so geht also die Gl. 1) über in die Gleichung:

$$2 \cdot M = K + \tfrac{1}{4} \int r^2 \cdot \sin 2 \cdot d\vartheta.$$

Unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung ist nun $\sin 2\, d\vartheta = 2\, d\vartheta$, also

$$2) \quad 2 \cdot M = K + \tfrac{1}{2} \int r^2 \cdot d\vartheta = K + \tfrac{1}{2} \int \frac{r^2}{\varrho} \cdot ds,$$

wenn noch ds das Bogenelement von K und ϱ der Krümmungsradius ist.

Das sind mit geringen Änderungen in der Bezeichnung die Betrachtungen und Formeln von Steiner. Auf Grund derselben findet er, dass der doppelte Flächeninhalt der Fusspunktfläche gleich dem Flächeninhalt erster Art der Rollkurve ist. Betrachtet man nun aber die Figur 10, so erkennt man, dass sich eine solche Figur nur unter ganz speziellen Annahmen ergiebt. Das Charakteristische derselben besteht nämlich darin, dass die Fusspunkte der Lote von P auf die Seiten des Vielecks $ABCD$... alle zwischen den Endpunkten der Seiten AB, BC, CD... liegen. Das wird jedoch im Allgemeinen durchaus nicht zutreffen, setzt also eine spezielle Lage des Punktes P voraus. Bedenkt man nun, dass ja dieses Vieleck nur ein vorläufiger Ersatz einer Kurve sein soll, so hat man noch viel weniger ein Recht, eine solche spezielle Lage des Punktes P anzunehmen. Berechtigt wäre eine solche Figur

nur, wenn man die Fusspunktkurve eines Kreises hinsichtlich seines Mittelpunktes als Pol betrachten wollte. Im Allgemeinen fallen die Fusspunkte der Lote gerade nicht zwischen die Endpunkte der Seiten; das würde nur für die Fusspunkte der Normalen von P an die Kurve K zutreffen. Steiners Figur ist also nicht nur speziell, sondern giebt die Verhältnisse einer Kurve sogar unrichtig wieder. Es wäre ja allerdings möglich, dass sich dieselbe Formel ergäbe, wenn man die richtige Figur zeichnet. Das ist aber nicht der Fall; es ergiebt sich dann eine etwas andere Formel.

§ 2. Verbesserung der Steinerschen Betrachtungen.

In der Figur 11 sind von P aus auf die Seiten des Vielecks $ABC\ldots$ die Lote PA_1, PB_1, $PC_1\ldots$ gefällt, so dass $A_1\ B_1\ C_1\ldots$ das Fusspunktenvieleck von $ABC\ldots$ hinsichtlich P ist. Setzt man $\angle BPB_1 = \mu$ und $\angle BPA_1 = \nu$, so erhält man unter Benutzung analoger Bezeichnungen wie vorher:

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot A_1PB_1 - APB\\
&= A_1PB_1 + A_1BPB_1 - BPA_1 - (APA_1 - BPA_1)\\
&= A_1PB_1 + A_1BPB_1 - APA_1\\
&= A_1PB_1 + A_1BB_1 + BPB_1 - APA_1\\
&= \tfrac{1}{2} BA_1 \cdot PB_1 \cdot \sin\beta + \tfrac{1}{2} BA_1 \cdot BB_1 \cdot \sin\beta + BPB_1 - APA_1\\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \sin\beta\,(PA_1 \cdot PB_1 + BA_1 \cdot BB_1) + BPB_1 - APA_1\\
&= \tfrac{1}{2} \sin\beta\,(b\cos\nu \cdot b \cdot \cos\mu + b \cdot \sin\nu \cdot b \cdot \sin\mu) + BPB_1 - APA_1\\
&= \tfrac{1}{2} b^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos(\mu - \nu) + BPB_1 - APA_1\\
&= \tfrac{1}{4} b^2 \cdot \sin 2\beta + BPB_1 - APA_1.
\end{aligned}
$$

Man findet eine Anzahl analoger Gleichungen:

$$2 \cdot A_1PB_1 - APB = \tfrac{1}{4} b^2 \cdot \sin 2\beta + BPB_1 - APA_1$$

$$2 \cdot B_1PC_1 - BPC = \tfrac{1}{4} c^2 \cdot \sin 2\gamma + CPC_1 - BPB_1 \text{ u. s. w.}$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$2 \cdot \Sigma A_1PB_1 - \Sigma APB = \tfrac{1}{4} \Sigma b^2 \cdot \sin 2\beta + ZPZ_1 - APA_1,$$

wenn ZPZ_1 das letzte der auftretenden Dreiecke ist. Setzt man $APA_1 = \triangle_1$ und $ZPZ_1 = \triangle_2$ und bedient sich im Übrigen derselben Bezeichnungen wie im vorigen Paragraphen, so ergiebt sich:

$$3)\quad 2 \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \tfrac{1}{4} \Sigma b^2 \cdot \sin 2\beta + \triangle_2 - \triangle_1.$$

Macht man den Übergang vom Vieleck zur Kurve, so erhält man durch analoge Schlüsse wie in § 1:

$$4)\quad 2 \cdot M = K + \tfrac{1}{2}\int \frac{r^2}{\varrho} \cdot ds + \triangle_2 - \triangle_1.$$

Ist $\triangle_1 = \triangle_2$, so sind also Steiners Formeln richtig und damit auch alle Schlüsse, die Steiner daran anknüpft. Bei einer geschlossenen Kurve ist nun stets $\triangle_1 = \triangle_2$. Solange Steiner geschlossene Kurven betrachtet, sind also alle seine Untersuchungen richtig, jedoch nicht mehr, sobald er zur Behandlung eines ungeschlossenen Kurvenbogens übergeht. Es ist der doppelte Flächeninhalt des Fusspunktbogens nicht gleich dem Flächeninhalt erster Art der Rollkurve, sondern gleich dem Flächeninhalt erster Art vermehrt um $\triangle_2 - \triangle_1$, und das ist der Flächeninhalt zweiter Art.

§ 3. Ableitung einiger Formeln.

Man betrachte die Fusspunktkurve einer gegebenen Kurve K hinsichtlich eines Punktes P und wähle P zum Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems und eine beliebige Gerade Px als Grundstrahl. In Bezug auf dasselbe möge die Kurve K dargestellt werden durch die Gleichungen $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Die Koordinaten des dem Punkte A oder r, φ von K entsprechenden Punktes A_1 der Fusspunktkurve seien r_1, φ_1. Bezeichnet man noch das Bogenelement von K mit ds und den Winkel PAA_1 mit α, so ergiebt sich aus der Figur 12:

$$5)\quad \varphi_1 - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$6)\quad r_1 = r \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi) = r \cdot \sin\alpha.$$

Nach bekannten Formeln über Polarkoordinaten ist ferner

$$7)\quad \sin\alpha = r \cdot \frac{d\varphi}{ds} \qquad \cos\alpha = -\frac{dr}{ds} \qquad tg\,\alpha = -r \cdot \frac{d\varphi}{dr}.$$

Bezeichnet man noch den Kontingenzwinkel von K im Punkte A mit $d\vartheta$ und den Krümmungsradius mit ϱ, so ist nach einer bekannten Formel der Kurventheorie $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho}$. Da nun PA_1

senkrecht auf der Tangente von K steht, so ist $d\vartheta = d\varphi_1$. Daher ist bei der Fusspunkttransformation

$$8)\quad \frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho}.$$

Nach Formel 5) ist $d\alpha = d\varphi - d\varphi_1$, daher

$$9)\quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{r} - \frac{1}{\varrho};$$

man vergleiche die erste Formel 7) und die Formel 8).

Nun findet man

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{dr}{ds} + r\cos\alpha \cdot \frac{d\alpha}{ds}$$

$$= -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + r\cos\alpha \left(\frac{\sin\alpha}{r} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= -\frac{r}{\varrho} \cdot \cos\alpha$$

und

$$\frac{d}{ds} r \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \frac{dr}{ds} - r\sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{ds}$$

$$= -\cos^2\alpha - r\sin\alpha \left(\frac{\sin\alpha}{r} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= -1 + \frac{r}{\varrho} \cdot \sin\alpha.$$

Man hat also:

$$10)\quad \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha = -\frac{r}{\varrho} \cdot \cos\alpha \qquad \frac{d}{ds} r\cos\alpha = -1 + \frac{r}{\varrho}\sin\alpha.$$

Ferner gelten die folgenden vier Formeln:

$$11)\quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_1 &= \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\alpha - \varphi_1) \\ \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_1 &= -\frac{r}{\varrho}\cos(\alpha - \varphi_1) \\ \frac{d}{ds} r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\varphi_1 &= -\sin\varphi_1 + \frac{r}{\varrho}\cos(\alpha - \varphi_1) \\ \frac{d}{ds} r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi_1 &= -\cos\varphi_1 + \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\alpha - \varphi_1). \end{aligned}$$

Die erste und dritte derselben findet man in folgender Weise:

$$\frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_1 = \sin\varphi_1 \cdot \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha + r \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{ds}$$

$$= -\frac{r}{\varrho} \cos\alpha \cdot \sin\varphi_1 + \frac{r}{\varrho} \sin\alpha \cdot \cos\varphi_1$$

$$= \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\alpha - \varphi_1).$$

$$\frac{d}{ds} r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\varphi_1 = \sin\varphi_1 \cdot \frac{d}{ds} r\cos\alpha + r\cos\alpha \cdot \cos\varphi_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{ds}$$

$$= \sin\varphi_1 \left(-1 + \frac{r}{\varrho} \sin\alpha\right) + \frac{r}{\varrho} \cos\alpha \cdot \cos\varphi_1$$

$$= -\sin\varphi_1 + \frac{r}{\varrho} \cdot \cos(\alpha - \varphi_1).$$

Infolge der Formeln 11) ergiebt sich leicht:

12) $$\frac{d}{ds} r \cdot \sin\varphi = \cos\varphi_1 \qquad \frac{d}{ds} r \cdot \cos\varphi = -\sin\varphi_1.$$

Denn es ist z. B.:

$$\frac{d}{ds} r \cdot \sin\varphi = -\frac{d}{ds} r \cdot \cos(\alpha + \varphi_1)$$

$$= -\frac{d}{ds} r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi_1 + \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_1$$

$$= \cos\varphi_1.$$

Aus den Formeln 11) erhält man auch die Formeln:

13)
$$\frac{d}{ds} r \cdot \sin(\alpha - \varphi_1) = \sin\varphi_1 - 2\frac{r}{\varrho} \cos(\alpha - \varphi_1)$$
$$-\frac{d}{ds} r \cdot \cos(\alpha - \varphi_1) = \cos\varphi_1 - 2\frac{r}{\varrho} \sin(\alpha - \varphi_1).$$

Den beiden ersten Formeln 11) kann man auch folgende Gestalt geben:

14)
$$\frac{d}{ds} r_1 \cdot \sin\varphi_1 = \frac{1}{\varrho}(2r_1 \cdot \cos\varphi_1 - r \cdot \cos\varphi)$$
$$\frac{d}{ds} r_1 \cdot \cos\varphi_1 = -\frac{1}{\varrho}(2r_1 \cdot \sin\varphi_1 - r \cdot \sin\varphi)$$

Es ist nämlich:

$$r_1 = r \cdot \sin\alpha, \text{ also } \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_1 = \frac{d}{ds} r_1 \cdot \sin\varphi_1,$$

und $$\frac{r}{\varrho} \sin(\alpha - \varphi_1) = \frac{r}{\varrho} (\sin\alpha \cdot \cos\varphi_1 - \cos\alpha \cdot \sin\varphi_1)$$

$$= \frac{r}{\varrho} \left(2 \sin\alpha \cdot \cos\varphi_1 - \sin(\alpha + \varphi_1)\right)$$

$$= -\frac{1}{\varrho} (r \cos\varphi - 2 r_1 \cdot \cos\varphi_1).$$

Entsprechend findet man die zweite Formel 14.

§ 4. Analytische Ableitung der verbesserten Formel von Steiner.

Aus den Gleichungen 6) und 8) ergiebt sich:

$$r_1^2 \frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{r^2}{\varrho} \sin^2\alpha = \frac{r^2}{\varrho} (1 - \cos^2\alpha).$$

Aus $r_1^2 \frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{r^2}{\varrho} \sin^2\alpha$ folgt unter Benutzung der zweiten Formel 10):

$$r_1^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{ds} = r \cdot \sin\alpha \left(1 + \frac{d}{ds} r \cos\alpha\right)$$

$$15) \quad r_1^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{ds} = r \cdot \sin\alpha + r \cdot \sin\alpha \cdot \frac{d}{ds} r \cdot \cos\alpha.$$

Aus $r_1^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{r^2}{\varrho} (1 - \cos^2\alpha)$ erhält man analog unter Benutzung der ersten Formel 10):

$$16) \quad r_1^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{r^2}{\varrho} + r \cos\alpha \cdot \frac{d}{ds} r \cdot \sin\alpha.$$

Addition dieser beiden Formeln liefert:

$$2 r_1^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{ds} = r \cdot \sin\alpha + \frac{r^2}{\varrho} + \frac{d}{ds} (r \cdot \sin\alpha) \, (r \cdot \cos\alpha).$$

Unter Beachtung der ersten Formel 7) findet man also:

$$17) \quad r_1^2 \cdot d\varphi_1 = \tfrac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi + \tfrac{1}{2} \frac{r^2}{\varrho} \cdot ds + \tfrac{1}{2} d(r \cdot \sin\alpha) \cdot (r \cos\alpha).$$

Benutzt man wieder die gewohnten Bezeichnungen, so erhält man bei der Integration zwischen den Grenzen t_1 und t_2:

$$18)\quad 2 \cdot M = K + \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{r^2}{\varrho} \cdot ds + \tfrac{1}{2}\Big[(r \cdot \sin\alpha) \cdot (r \cdot \cos\alpha)\Big]_{t_1}^{t_2}.$$

Nach Figur 12 ist $r \sin\alpha = r_1 = PA_1$ und $r\cos\alpha = AA_1$, daher ist

$$\tfrac{1}{2}(r\sin\alpha)\,(r\cos\alpha) = APA_1 = \triangle.$$

Die Gleichung 18) ist also keine andere als die auf Seite 30 erhaltene Gleichung

$$4)\quad 2 \cdot M = K + \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{r^2}{\varrho} \cdot ds + \triangle_2 - \triangle_1.$$

Der Gleichung $\triangle = \tfrac{1}{2}(r\sin\alpha)\,(r\cos\alpha)$ zufolge ist $\triangle$ negativ zu rechnen, wenn α ein stumpfer Winkel ist Das muss auch in der Formel

$$N_2 = N_1 + \triangle_2 - \triangle_1$$

auf Seite 6 berücksichtigt werden. Damit diese Formel in den Figuren auch dem Vorzeichen nach stimmt, sind dieselben alle so gezeichnet, dass α ein spitzer Winkel ist.

IV. Vergleichung der Flächeninhalte der ∞^2 Fusspunktkurven einer gegebenen Kurve.

§ 1. Ableitung der Fundamentalformel.

Man betrachte eine Kurve K und ihre Fusspunktkurven M und M' hinsichtlich zweier verschiedener Punkte P und P'. Diese Punkte wähle man als Anfangspunkte zweier verschiedener Polarkoordinatensysteme mit parallelen Grundstrahlen Px und $P'x'$. Die Koordinaten eines Punktes A der Kurve K in Bezug auf diese Koordinatensysteme seien r, φ resp. r', φ', die Koordinaten des dem Punkte A entsprechenden Punktes A_1 von M in Bezug auf das erste System seien r_1, φ_1 und die des entsprechenden Punktes A'_1 von M' in Bezug auf das

zweite System r'_1, φ'_1. Bezeichnet man die Winkel PAA_1 und $P'AA'_1$ mit α und α' und die Koordinaten des Punktes P' in Bezug auf das Koordinatensystem Pxy mit u und v, so liefert die Figur 13 die Formeln:

$$1) \quad \begin{aligned} r' \cdot \sin \alpha' &= r \sin \alpha - (u \cos \varphi_1 + v \sin \varphi_1) \\ r' \cdot \cos \alpha' &= r \cos \alpha - (u \sin \varphi_1 - v \cos \varphi_1). \end{aligned}$$

Bezeichnet man Sektoren von K, M und M', die demselben Bogen k_1 k_2 von K entsprechen mit K', K, M', M, so dass

$$K' = \tfrac{1}{2}\int_1^2 r'^2 \cdot d\varphi' \qquad K = \tfrac{1}{2}\int_1^2 r^2 \cdot d\varphi$$

$$M' = \tfrac{1}{2}\int_1^2 r'^2_1 \cdot d\varphi'_1 \qquad M = \tfrac{1}{2}\int_1^2 r_1^2 \cdot d\varphi_1$$

ist, so wird nach Formel 18) auf Seite 34

$$2 \cdot M' = K' + \tfrac{1}{2}\int_1^2 r'^2 \cdot \frac{ds}{\varrho} + \tfrac{1}{2}\Big[(r' \sin \alpha')\ (r' \cos \alpha')\Big]_1^2$$

$$2 \cdot M = K + \tfrac{1}{2}\int r^2 \cdot \frac{ds}{\varrho} + \tfrac{1}{2}\Big[(r \sin \alpha)\ (r \cos \alpha)\Big]_1^2.$$

Durch Subtraktion dieser Formeln erhält man:

$$2) \quad 4 \cdot (M' - M) = 2(K' - K) + \int_1^2 (r'^2 - r^2) \cdot \frac{ds}{\varrho} + \Big[(r' \sin \alpha')\ (r' \cos \alpha') - (r \sin \alpha)\ (r \cos \alpha)\Big]_1^2.$$

Durch Quadrieren und Addieren der Formeln 1) ergiebt sich:

$$r'^2 = r^2 - 2 r \sin \alpha (u \cos \varphi_1 + v \sin \varphi_1) - 2 r \cos \alpha (u \sin \varphi_1 - v \cos \varphi_1) + u^2 + v^2$$

$$r'^2 - r^2 = -2 \cdot u \cdot r \cdot \sin(\alpha + \varphi_1) + 2 v \cdot r \cos(\alpha + \varphi_1) + u^2 + v^2.$$

Ferner erhält man aus den Formeln 1):

$$(r' \sin \alpha')\ (r' \cos \alpha') - (r \sin \alpha)\ (r \cos \alpha) = -u r \cos(\alpha - \varphi_1) + v r \sin(\alpha - \varphi_1) + u^2 \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 - u v (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) - v^2 \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1.$$

Setzt man diese Werte in die Formel 2) ein, so geht dieselbe über in

$$3)\quad 4(M'-M)=2(K'-K)-u\int_1^2 U'\cdot ds-v\int_1^2 V'\cdot ds$$
$$+\Big[u^2(\varphi_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_1)-uv(\cos^2\varphi_1-\sin^2\varphi_1)$$
$$+v^2(\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1)\Big]_1^2,$$

wobei gesetzt worden ist

$$4)\quad \begin{aligned} U'&=2\frac{r}{\varrho}\sin(\alpha+\varphi_1)+\frac{d}{ds}r\cos(\alpha-\varphi_1)\\ V'&=-2\frac{r}{\varrho}\cos(\alpha+\varphi_1)-\frac{d}{ds}r\sin(\alpha-\varphi_1). \end{aligned}$$

Infolge der Gleichungen 13) von Seite 32 wird

$$U'=4\frac{r_1}{\varrho}\cos\varphi_1-\cos\varphi_1$$
$$V'=4\frac{r_1}{\varrho}\sin\varphi_1-\sin\varphi_1.$$

Substituiert man diese Werte in die Formel 3), so erhält man:

$$5)\quad 4(M'-M)=2\cdot(K'-K)-4u\int_1^2 r_1\cos\varphi_1\,d\varphi_1$$
$$-4v\int_1^2 r_1\sin\varphi_1\,d\varphi_1+\int_1^2(u\cos\varphi_1+v\sin\varphi_1)\,ds+\Big[\quad\Big]_1^2$$

Zufolge Formel 7) Seite 30 wird nun

$$2\cdot(K'-K)=\int_1^2(r'^2\,d\varphi'-r^2\,d\varphi)=\int_1^2(r'\sin\alpha'-r\sin\alpha)\,ds$$

oder nach Formel 1) Seite 35

$$2(K'-K)=-\int_1^2(u\cos\varphi_1+v\sin\varphi_1)\,ds.$$

In der Formel 5) hebt sich also das erste gegen das vierte Glied. Setzt man noch

$$6)\quad U=\int_1^2 r_1\cos\varphi_1\cdot d\varphi_1\qquad V=\int_1^2 r_1\sin\varphi_1\cdot d\varphi_1,$$

so erhält man also

$$7)\quad 4(M'-M) = -4uU - 4vV + \Big[u^2(\varphi_1 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1) - uv(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) + v^2(\varphi_1 - \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1)\Big]_1^2.$$

So gelangt man zu Gleichung 7), wenn man Steiner nachahmen will, der bei seinen Betrachtungen ja von der Formel 2) auf S. 28 ausgeht. Wetzig findet diese Formel weit einfacher, indem er die Relation

$$r'_1 = r_1 - (u\cos\varphi_1 + v\sin\varphi_1)$$

benutzt; dieselbe geht aus der ersten Gleichung 1) hervor, wenn man darin

$$r'_1 = r'\cdot\sin\alpha' \qquad r_1 = r\cdot\sin\alpha$$

einsetzt. Vermöge dieser Relation erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\int_1^2 r'^2_1\cdot d\varphi'_1 = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \Big(r_1 - (u\cos\varphi_1 + v\sin\varphi_1)\Big)^2\cdot d\varphi_1 \quad \text{oder}$$

$$M' = M - u\int_1^2 r_1\cos\varphi_1\cdot d\varphi_1 - v\cdot\int_1^2 r_1\sin\varphi_1\cdot d\varphi_1 + \tfrac{1}{2}u^2\int_1^2\cos^2\varphi_1\cdot d\varphi_1 - uv\int_1^2\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1\cdot d\varphi_1 + \tfrac{1}{2}v^2\int_1^2\sin^2\varphi_1\cdot d\varphi_1.$$

Nun ist:

$$\int\cos^2\varphi_1\cdot d\varphi_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1)$$

$$\int\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1\cdot d\varphi_1 = -\tfrac{1}{4}(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1)$$

$$\int\sin^2\varphi_1\cdot d\varphi_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1).$$

Setzt man das ein und benutzt wieder die Bezeichnung 6), so findet man gleichfalls:

$$7)\quad 4(M'-M) = -4uU - 4vV + \Big[u^2(\varphi_1 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1) - uv(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) + v^2(\varphi_1 - \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1)\Big]_1^2.$$

Nun möge φ_1 als Integrationsvariable gewählt werden. Nimmt man dann das Lot von P auf die Tangente des Anfangspunktes k_1 des betrachteten Bogens $k_1\ k_2$ als Grundstrahl und bezeichnet den Drehungswinkel der Tangente längs des Bogens $k_1\ k_2$ mit σ, so sind $\overset{1}{\varphi}_1 = 0$ und $\overset{2}{\varphi}_1 = \sigma$ die Grenzen der Integrale. Dann wird also

$$8)\quad 4(M' - M) = -4uU - 4vV + u^2(\sigma + \sin\sigma\cdot\cos\sigma) + 2uv\sin^2\sigma + v^2(\sigma - \sin\sigma\cdot\cos\sigma).$$

Der Winkel σ kann, da ja auch Wendepunkte auftreten dürfen, positiv oder negativ ausfallen. Ist σ negativ, so braucht man jedoch nur den Anfangs- und den Endpunkt von $k_1\ k_2$ zu vertauschen, damit σ positiv wird. Im Folgenden wird angenommen, dass der Anfangspunkt des Bogens $k_1\ k_2$ so gewählt ist, dass σ positiv ist.

§ 2. Transformation und Discussion dieser Formel.

Durch Ausführung einer Koordinatentransformation kann man Formel 8) wesentlich vereinfachen. Sind $u_1\ v_1$ die Koordinaten desjenigen Punktes P' in Bezug auf das Koordinatensystem Pxy, dem die kleinste Fusspunktfigur M' entspricht, so müssen, da

$$2\cdot\frac{\partial M'}{\partial u} = -2U + u(\sigma + \sin\sigma\cos\sigma) + v\sin^2\sigma$$

$$2\cdot\frac{\partial M'}{\partial v} = -2V + u\sin^2\sigma + v(\sigma - \sin\sigma\cdot\cos\sigma)$$

ist, u_1 und v_1 den Gleichungen genügen:

$$9)\quad \begin{aligned} u_1(\sigma + \sin\sigma\cos\sigma) + v_1\sin^2\sigma &= 2U \\ u_1\sin^2\sigma + v_1(\sigma - \sin\sigma\cos\sigma) &= 2V \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$10)\quad \begin{aligned} u_1 &= 2\,\frac{U(\sigma - \sin\sigma\cos\sigma) - V\sin^2\sigma}{\sigma^2 - \sin^2\sigma} \\ v_1 &= 2\cdot\frac{V(\sigma + \sin\sigma\cdot\cos\sigma) - U\sin^2\sigma}{\sigma^2 - \sin^2\sigma}. \end{aligned}$$

Das sind die Koordinaten des Punktes, dem die kleinste (oder grösste) Fusspunktfigur entspricht. Wir bezeichnen diesen Punkt gleich jetzt als den Minimumpol T. Macht man T zum Anfangspunkt eines mit Pxy parallelen Koordinatensystems und bezeichnet die Koordinaten eines Punktes P' in Bezug auf dasselbe mit u' v', so ist

$$u = u_1 + u' \qquad v = v_1 + v'.$$

Substituiert man diese Werte in die Formel 8), so verschwinden infolge der Relationen 9) die Koeffizienten von u' und v', so dass man erhält:

11) $4(M' - M) = u'^2(\sigma + \sin\sigma \cdot \cos\sigma) + 2u'v'\sin^2\sigma + v'^2(\sigma - \sin\sigma \cdot \cos\sigma) - D,$ wo

12) $D = 2u_1 U + 2v_1 V$

ist. Auch Formel 11) lässt sich noch einfacher gestalten, indem man eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\frac{\sigma}{2}$ vornimmt. Sind u'' v'' die Koordinaten des Punktes P' in Bezug auf dieses neue Koordinatensystem, so ist

$$u' = u''\cos\frac{\sigma}{2} - v''\sin\frac{\sigma}{2} \qquad v' = u''\sin\frac{\sigma}{2} + v''\cos\frac{\sigma}{2}.$$

Substituiert man diese Werte in Formel 11), so erhält man nach einer kleinen Rechnung:

13) $4(M' - M) = u''^2(\sigma + \sin\sigma) + v''^2(\sigma - \sin\sigma) - D.$

Bezeichnet T auch zugleich die zum Minimumpol T gehörige Fusspunktfläche, so ergiebt sich aus Formel 11), da für den Minimumpol $u' = v' = 0$ ist,

14) $4T = 4M - D = 4M - 2u_1 U - 2v_1 V.$

Subtrahiert man diese Gleichung von Gleichung 13), so erhält man:

15) $4M' = 4T + u''^2(\sigma + \sin\sigma) + v''^2(\sigma - \sin\sigma).$

Da nun σ stets ein positiver Winkel ist, so sind auch $\sigma + \sin\sigma$ und $\sigma - \sin\sigma$ positive Grössen; daraus geht hervor, dass T wirklich die kleinste und nicht etwa die grösste Fusspunktfigur ist.

Soll $M' = const.$ sein, so muss nach Formel 15)

$$u''^2(\sigma + sin\,\sigma) + v''^2(\sigma - sin\,\sigma) = C^2 \quad \text{oder}$$

$$16)\ \frac{u''^2}{\bar{u}^2} + \frac{v''^2}{\bar{v}^2} = 1 \quad \text{sein, wenn}$$

$$17)\ \bar{u}^2 = \frac{C^2}{\sigma + sin\,\sigma} \qquad \bar{v}^2 = \frac{C^2}{\sigma - sin\,\sigma} \quad \text{ist.}$$

Die Punkte mit gleichen Fusspunktflächen liegen also auf einer der ∞^1 Ellipsen 16). Eliminiert man aus den Gleichungen 17) $sin\ \sigma$, so findet man

$$C^2 = 2 \cdot \frac{\bar{u}^2 \cdot \bar{v}^2}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \cdot \sigma.$$

Ist nun R die Länge desjenigen radius vector der Ellipse, der die Winkel des Axenkreuzes halbiert, so ist:

$$R^2 = 2 \cdot \frac{\bar{u}^2 \cdot \bar{v}^2}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}. \quad \text{Daher wird:}$$

$$u''^2(\sigma + sin\,\sigma) + v''^2(\sigma - sin\,\sigma) = C^2 = R^2 \cdot \sigma,$$

so dass die Formel 15) auch so geschrieben werden kann

$$18)\ M' = T + \tfrac{1}{4} R^2 \cdot \sigma.$$

Diese Resultate können zu dem folgenden Theorem zusammengefasst werden:

Theorem III: Unter den ∞^2 Fusspunktfiguren eines stetigen Kurvenbogens $k_1\ k_2$ hinsichtlich der ∞^2 Punkte P seiner Ebene besitzen diejenigen gleichen Flächeninhalt, welche auf einer von gewissen ∞^1 Ellipsen liegen, deren gemeinsames Axenkreuz den Halbierungslinien der von den Endtangenten des Bogens $k_1\ k_2$ gebildeten Winkel parallel ist, und zwar entspricht dem gemeinsamen Mittelpunkt T dieser Ellipsen die kleinste Fusspunktfigur, während die Fläche des Fusspunktbogens irgend eines andern Punktes P diese kleinste Fläche um einen Sektor übertrifft, dessen Centriwinkel gleich dem halben Drehungswinkel der Tangente des Bogens $k_1\ k_2$ ist, und dessen Radius gleich demjenigen radius vector der durch P gehenden Ellipse ist, der die Winkel des Axenkreuzes derselben halbiert.

Dieses Resultat stimmt mit dem von Raabe und Wetzig gefundenen überein, widerspricht aber Steiners Angaben. Auch hierfür liegt die Ursache in dem eingehend besprochenen Irrtum Steiners.

Ist $\sigma = \nu \cdot \pi$, wo ν eine ganze Zahl sein soll, so ergiebt sich aus 15)

$$19)\quad 4 \cdot M' = 4 \cdot T + (u''^2 + v''^2)\,\nu \cdot \pi.$$

Das liefert folgendes Theorem:

Theorem: Bei einem stetigen Kurvenbogen, längs dem sich die Tangente um π oder ein Vielfaches von π dreht, liegen Punkte mit Fusspunktflächen gleichen Inhalts auf konzentrischen Kreisen um den Minimumpol.

Im Falle $\sigma = 0$ folgt aus Formel 8)

$$20)\quad M' = M - u \cdot U - v \cdot V.$$ Das giebt das

Theorem: Ist die Gesamtdrehung der Tangente gleich 0 wie bei einem S-förmigen Kurvenbogen, dessen Tangenten im Anfangs- und Endpunkt parallel sind, so giebt es kein Minimum des Flächeninhalts im bisherigen Sinne. Punkte mit gleichen Fusspunktflächen liegen auf einer von ∞^1 parallelen Geraden, unter denen sich eine befindet, deren Fusspunktfläche gleich 0 ist; dieselbe hat die Gleichung $\frac{U}{M} u + \frac{V}{M} v = 1$.

Für $u_1 = v_1 = 0$ liefern die Gleichungen 9) $U = V = 0$. Ist umgekehrt $U = V = 0$, so ist nach 10) auch $u_1 = v_1 = 0$. Das Verschwinden von u_1 und v_1 bedeutet nun, dass der ursprüngliche Koordinatenanfang zugleich Minimumpol ist. Es gilt also der

Satz: Für die Fusspunktkurve des Minimumpols verschwinden die Integrale U und V; und verschwinden U und V für einen bekannten Punkt, so ist derselbe der Minimumpol T.

Infolge des Theorems I lassen sich alle hier gefundenen Theoreme auf die Flächen zweiter Art der speciellen Rollkurven übertragen. Insbesondere erhält man auf diese Weise:

Theorem IV: Vergleicht man die Flächen zweiter Art der ∞^2 Rollkurven, die die ∞^2 Punkte der Ebene eines stetigen Kurvenbogens beim Rollen desselben auf einer Geraden erzeugen,

so findet man, dass Punkte, welche gleiche Flächen zweiter Art erzeugen, auf einer von ∞^1 gewissen Ellipsen liegen, deren gemeinsames Axenkreuz den Halbierungslinien der Winkel der Endtangenten des rollenden Bogens parallel ist, und zwar entspricht dem gemeinsamen Mittelpunkt T dieser Ellipsen die kleinste Fläche zweiter Art, während die von irgend einem andern Punkt P erzeugte Fläche zweiter Art diese kleinste Fläche zweiter Art um einen Kreissektor übertrifft, dessen Centriwinkel gleich dem Drehungswinkel der Tangente des rollenden Bogens ist, und dessen Radius gleich dem radius vector der durch P gehenden Ellipse ist, der die Winkel des Axenkreuzes derselben halbiert.

Für die Flächen erster Art gilt ein anderes Theorem, welches sich unter Beschränkung auf stetige Bogen $k_1\ k_2$ ohne Wendepunkte bei Steiner abgeleitet findet. Man vergleiche die Einleitung auf Seite 9.

§ 3. Bestimmung des Krümmungsschwerpunktes.

Was unter dem Krümmungsschwerpunkt S eines Kurvenbogens $k_1\ k_2$ mit wechselndem Vorzeichen der Krümmung verstanden werden soll, ist bereits auf Seite 7 erklärt worden. Sind $x\ y$ die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte des Bogens und $u_2\ v_2$ die seines Krümmungsschwerpunktes in Bezug auf das Koordinatensystem $P\,x\,y$, so ist nach den Formeln über den Mittelpunkt paralleler Kräfte:

$$u_2 \cdot \int_1^2 \frac{ds}{\varrho} = \int_1^2 x \frac{ds}{\varrho} \qquad v_2 \int_1^2 \frac{ds}{\varrho} = \int_1^2 y \cdot \frac{ds}{\varrho}.$$

Nun ist $\frac{ds}{\varrho} = d\varphi_1$ und $x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$, daher

$$21) \qquad \begin{aligned} u_2\left(\varphi_1^2 - \varphi_1^1\right) &= \int_1^2 r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi_1 \\ v^2\left(\varphi_1^2 - \varphi_1^1\right) &= \int_1^2 r \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi_1. \end{aligned}$$

Aus den Formeln 14) auf Seite 32 folgt

$$r \cos\varphi \cdot \frac{ds}{\varrho} = 2\, r_1 \cos\varphi_1 \cdot \frac{ds}{\varrho} - d(r_1 \cdot \sin\varphi_1)$$

$$r \sin\varphi \cdot \frac{ds}{\varrho} = 2\, r_1 \sin\varphi_1 \cdot \frac{ds}{\varrho} + d(r_1 \cdot \cos\varphi_1), \text{ also}$$

22)
$$u_2\left(\varphi_1^2 - \varphi_1^1\right) = 2\int_1^2 r_1 \cos\varphi_1 \cdot d\varphi_1 - \Big[r_1 \cdot \sin\varphi_1\Big]_1^2$$

$$v_2\left(\varphi_1^2 - \varphi_1^1\right) = 2\int_1^2 r_1 \sin\varphi_1 \cdot d\varphi_1 + \Big[r_1 \cdot \cos\varphi_1\Big]_1^2.$$

Ist t die Länge der den Anfangs- und Endpunkt verbindenden Sehne des Fusspunktbogens und τ der Winkel derselben mit dem Grundstrahl, so ist:

$$\Big[r_1 \cdot \sin\varphi_1\Big]_1^2 = t \cdot \sin\tau$$

$$\Big[r_1 \cdot \cos\varphi_1\Big]_1^2 = t \cdot \cos\tau.$$

Bedient man sich zugleich wieder der Abkürzungen 6), so kann man, da $\varphi_1^2 - \varphi_1^1 = \sigma$ ist, die Formeln 22) in der Form schreiben:

23)
$$u_2 \cdot \sigma = 2 \cdot U - t \cdot \sin\tau$$
$$v_2 \cdot \sigma = 2 \cdot V + t \cdot \cos\tau.$$

Ist $\sigma = 0$, so kann man also nicht von einem Krümmungsschwerpunkt sprechen. In dem Falle giebt es ja auch keinen Minimumpol.

§ 4. Die Beziehung zwischen dem Krümmungsschwerpunkt und dem Minimumpol.

Die Gleichungen 9) und 23) bestimmen die auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Koordinaten des Minimumpols T und des Krümmungsschwerpunkts S. Eliminiert man aus diesen Gleichungen $2\,U$ und $2\,V$, so erhält man zunächst die Beziehung:

24)
$$u_2 \cdot \sigma + t \cdot \sin\tau = u_1(\sigma + \sin\sigma \cdot \cos\sigma) + v_1 \sin^2\sigma$$
$$v_2 \cdot \sigma - t \cdot \cos\tau = u_1 \sin^2\sigma + v_1(\sigma - \sin\sigma \cdot \cos\sigma).$$

Setzt man den Minimumpol T als bekannt voraus und wählt ihn zum Koordinatenanfang, so ist $u_1 = v_1 = 0$, also:

$$25)\quad u_2\,\sigma = -\,t_1 \cdot \sin\tau_1 \qquad v_2\,\sigma = t_1 \cdot \cos\tau_1,$$

wenn t_1 die Länge der den Anfangs- und Endpunkt verbindenden Sehne des Fusspunktbogens von $k_1\ k_2$ hinsichtlich des Minimumpols T und τ_1 die Neigung dieser Sehne gegen die $+x$-Axe ist. Ist ferner l der Abstand des Krümmungsschwerpunktes S vom Minimumpol T und λ der Winkel von $S\ T$ gegen die $+x$-Axe, so findet man:

$$26)\quad l = \sqrt{u_2^{\,2} + v_2^{\,2}} = \frac{t_1}{\sigma} \qquad tg\,\lambda = \frac{v_2}{u_2} = -\,\frac{1}{tg\,\tau_1}.$$

Dieses Resultat kann man folgendermassen in Worten aussprechen:

Theorem: Der Krümmungsschwerpunkt S eines Kurvenbogens $k_1\ k_2$ kann bei bekanntem Minimumpol T gefunden werden, indem man auf die Begrenzungssehne t_1 des Fusspunktbogens von $k_1\ k_2$ hinsichtlich T ein Lot fällt und auf demselben eine Strecke l abträgt, die gleich dem Abstande des Schwerpunktes und des Mittelpunktes eines über der Sehne t_1 beschriebenen Kreisbogens mit dem Centriwinkel σ ist.

Die Seite, nach der l abzutragen ist, ergiebt sich leicht gemäss den Formeln 25) aus der Grösse von τ_1.

Viel wichtiger ist die andere Frage, wie man bei bekanntem Krümmungsschwerpunkt S den Minimumpol T finden kann. Um das zu erkennen, setze man in den Formeln 24) $u_2 = v_2 = 0$. Dann sind u_1, v_1 die Koordinaten von T in Bezug auf ein dem ursprünglichen paralleles Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt S. Bezeichnet man die Länge der den Anfangs- und Endpunkt verbindenden Sehne des Fusspunktbogens von $k_1\ k_2$ hinsichtlich S mit t_2 und ihre Neigung gegen die $+x$-Axe mit τ_2, so ist also:

$$27)\quad \begin{aligned} &u_1\,(\sigma + \sin\sigma \cdot \cos\sigma) + v_1 \cdot \sin^2\sigma = t_2 \cdot \sin\tau_2 \\ &u_1 \sin^2\sigma + v_1\,(\sigma - \sin\sigma \cdot \cos\sigma) = -\,t_2 \cdot \cos\tau_2. \end{aligned}$$

Dreht man noch das Koordinatensystem um den Winkel $\frac{\sigma}{2}$ und bezeichnet die Koordinaten von T in diesem Koordinatensystem mit u'_1 und v'_1, so ist

$$u_1 = u'_1 \cos\frac{\sigma}{2} - v'_1 \sin\frac{\sigma}{2} \qquad v_1 = u'_1 \sin\frac{\sigma}{2} + v'_1 \cos\frac{\sigma}{2}.$$

Substituiert man diese Werte in 27), so erhält man:

$$u'_1(\sigma + \sin\sigma)\cdot\cos\frac{\sigma}{2} - v'_1(\sigma - \sin\sigma)\sin\frac{\sigma}{2} = t_2 \cdot \sin\tau_2$$

$$u'_1(\sigma + \sin\sigma)\sin\frac{\sigma}{2} - v'_1(\sigma - \sin\sigma)\cos\frac{\sigma}{2} = -t_2 \cdot \cos\tau_2;$$

und hieraus ergiebt sich:

$$28)\quad u'_1 = \frac{t_2 \cdot \sin\left(\tau_2 - \frac{\sigma}{2}\right)}{\sigma + \sin\sigma} \qquad v'_1 = \frac{-t_2 \cos\left(\tau_2 - \frac{\sigma}{2}\right)}{\sigma - \sin\sigma}.$$

Multipliciert man diese Gleichungen mit $\sigma + \sin\sigma$ und $\sigma - \sin\sigma$, so erhält man durch Quadrieren und Addieren derselben:

$$29)\quad u'^2_1(\sigma + \sin\sigma)^2 + v'^2_1(\sigma - \sin\sigma)^2 = t_2^2.$$

Setzt man nun

$$30)\quad \overline{\overline{u}} = \frac{t_2}{\sigma + \sin\sigma} \qquad \overline{\overline{v}} = \frac{t_2}{\sigma - \sin\sigma},$$

so kann man die Gleichungen 28) und 29) einfacher auch so schreiben:

$$28')\quad u'_1 = \overline{\overline{u}} \cdot \sin\left(\tau_2 - \frac{\sigma}{2}\right) \qquad v'_1 = -\overline{\overline{v}} \cdot \cos\left(\tau_2 - \frac{\sigma}{2}\right)$$

$$29')\quad \frac{u'^2_1}{\overline{\overline{u}}^2} + \frac{v'^2_1}{\overline{\overline{v}}^2} = 1.$$

Erinnert man sich einer bekannten Punktkonstruktion der Ellipse, so hat man damit das folgende Theorem erhalten:

Theorem: Ist S der Krümmungsschwerpunkt des Kurvenbogens $k_1\, k_2$, so liegt der Minimumpol T auf einer Ellipse mit dem Mittelpunkt S, deren Axen $\overline{\overline{u}}$ und $\overline{\overline{v}}$ die Formeln 30) angeben, während ihr Axenkreuz dem der Ellipsen für konstanten Flächeninhalt parallel ist. Ist S bekannt, so findet man T,

indem man von S aus unter dem Winkel $\frac{\sigma}{2} - \tau_2$ gegen die $+x'$-Axe einen Strahl zieht, auf demselben $SA = \overline{\overline{u}}$ und $SB = \overline{\overline{v}}$ abträgt und durch A eine Parallele zur x'-Axe und durch B eine Parallele zur y'-Axe zieht; der Schnittpunkt derselben ist T.

Nach 26) wird $l = 0$, wenn $t_1 = 0$ ist. Dies tritt ein, wenn Anfangs- und Endpunkt von $k_1\ k_2$ eine gemeinsame Tangente haben, insbesondere also auch dann, wenn $k_1\ k_2$ eine geschlossene Kurve K ist. Ausserdem wird auch dann noch $t_1 = 0$, wenn der Minimumpol T in den Schnittpunkt der Tangenten des Anfangs- und des Endpunktes fällt. Es besteht also das Theorem:

Theorem: Krümmungsschwerpunkt S und Minimumpol T eines stetigen Kurvenbogens $k_1\ k_2$ fallen zusammen, wenn Anfangs- und Endpunkt von $k_1\ k_2$ eine gemeinsame Tangente besitzen, oder wenn T zugleich der Schnittpunkt der Tangenten des Anfangs- und des Endpunktes von $k_1\ k_2$ ist.

§ 5. Anwendung dieser Ergebnisse auf die Hyperbel.

Als Beispiel soll jetzt die Hyperbel betrachtet werden. Dieses Beispiel hat ein besonderes Interesse. Es ist nämlich schon von Steiner[1]) ein Satz über die Flächeninhalte der ∞^2 Fusspunktkurven der ganzen Hyperbel aufgestellt worden. Bei der Herausgabe von Steiners Werken bemerkte Weierstrass in einem Schlusswort zu dem 1882 erschienenen zweiten Bande, dass dieser Satz nicht richtig sei. Das lässt sich jetzt leicht zeigen.

Lässt man nämlich eine Tangente von der Lage einer Asymptote ausgehend erst auf dem einen Ast bis zur Lage der andern Asymptote hinrollen und nun von dieser Asymptotenlage aus auf dem andern Ast, bis wieder die Lage der ersten Asymptote erreicht ist, so dreht sich die Tangente bei diesen Rollungen um gleiche Winkel aber in verschiedenem Drehungs-

1) Crelles Journal, Band XVIII, S. 372. Steiners Werke, Band II, S. 71.

sinn. Die Hyperbel muss also als eine Kurve aufgefasst werden, längs der die Gesamtdrehung der Tangente gleich 0 ist.

Die Gleichung der Hyperbel sei in der Form gegeben $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ist dann M der Flächeninhalt der Fusspunktkurve des Koordinatenanfangs und M' der Flächeninhalt der Fusspunktkurve irgend eines andern Punktes mit den Koordinaten u, v, so ist also nach Formel 20):

$$M' = M - u \cdot U - v \cdot V.$$

Es ist nun geometrisch evident, dass die Fusspunktkurve irgend eines Punktes auf der y-Axe diesen Punkt als Doppelpunkt haben und zur y-Axe symmetrisch liegen muss. Ihre Fläche besteht daher aus zwei gleichen Stücken, die nach der Regel von Gauss aber mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehen sind. Für alle Punkte der y-Axe ist also der Flächeninhalt der Fusspunktkurve gleich 0. Da auch der Koordinatenanfang zu ihnen gehört, so ist also $M = 0$. Die obige Relation vereinfacht sich also zu

$$M' = - u \cdot U - v \cdot V.$$

Nach Obigem muss auch $M' = 0$ sein, wenn man $u = 0$ setzt; daraus ergiebt sich $V = 0$. Man findet also die einfache Gleichung:

$$M' = - u \cdot U.$$

Um das durch die Rechnung zu bestätigen, setze man in die Hyperbelgleichung

$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \cdot \sin \varphi$$

ein. Dann erhält die Hyperbelgleichung in Polarkoordinaten die Form:

$$r = \frac{a\,b}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Berechnet man jetzt unter Benutzung der Formeln 5, 6 und 7 von Seite 30 die Grössen r_1, $\sin \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$ als Funktionen von φ, so kann man leicht die Formel bestätigen:

$$r_1 = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi_1 - b^2 \sin^2 \varphi_1}.$$

Das ist die Gleichung der Fusspunktkurve der Hyperbel hinsichtlich ihres Mittelpunktes. Setzt man noch $e^2 = a^2 + b^2$, so kann man auch schreiben

$$r_1 = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} = \sqrt{e^2 \cdot \cos^2 \varphi_1 - b^2}.$$

Will man die Aufgabe völlig lösen, so muss man für die Fusspunktkurve eines und desselben Punktes die Integrale U, V und M berechnen. Fasst man den Mittelpunkt der Hyperbel ins Auge und betrachtet zunächst nur die unbestimmten Integrale, so ist:

$$U = \int \cos \varphi_1 \cdot \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} \cdot d\varphi_1$$

$$V = \int \sin \varphi_1 \cdot \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi_1 - b^2} \cdot d\varphi_1$$

$$M = \tfrac{1}{2} \int (a^2 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_1) \cdot d\varphi_1.$$

Nach den Regeln der Integralrechnung findet man hieraus:

$$U = \frac{\sin \varphi_1}{2} \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + \frac{a^2}{2e} \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{e}{a} \sin \varphi_1 \right)$$

$$V = -\frac{\cos \varphi_1}{2} \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi_1 - b^2} + \frac{b^2}{2e} \lg \left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{e} \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi_1 - b^2} \right)$$

$$M = \tfrac{1}{2} \left(a^2 \varphi_1 - \frac{e^2}{2} (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1) \right).$$

Bezeichnet man den Wert der bestimmten Integrale für den rechten Hyperbelzweig mit U_1 V_1 M_1, für den linken Hyperbelzweig mit U_2 V_2 M_2 und für die ganze Hyperbel mit U V M, so findet man:

$$U_1 = \left[\frac{\sin \varphi_1}{2} \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + \frac{a^2}{2e} \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{e}{a} \sin \varphi_1 \right) \right]_{-\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}^{+\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}.$$

Dabei ist ψ der halbe Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel.

Die Integration erfolgt um den rechten Zweig der einer liegenden 8 gleichenden Fusspunktkurve herum entgegengesetzt zum Drehungssinne des Uhrzeigers. Da

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\cos\psi \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\sin\psi$$

$$\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\right]=-\cos\psi \qquad \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\right]=\cos\psi$$

ist, so ergiebt sich:

$$U_1=\cos\psi\sqrt{a^2-e^2\cdot\cos^2\psi}+\frac{a^2}{2e}\arcsin\left(\frac{e}{a}\cos\psi\right)$$
$$-\frac{a^2}{2e}\arcsin\left(-\frac{e}{a}\cos\psi\right).$$

Nach bekannten Eigenschaften der Hyperbel ist:

$$\sin\psi=\frac{b}{e} \qquad \cos\psi=\frac{a}{e} \qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{b}{a}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\cot\psi=\frac{a}{b}.$$

Da ferner $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$ und $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ ist, so erhält man:

$$U_1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^2}{e}.$$

Durch analoge Rechnungen findet man:

$$U_1=\frac{\pi}{2}\,\frac{a^2}{e} \qquad V_1=0 \qquad U_2=\frac{\pi}{2}\,\frac{a^2}{e} \qquad V_2=0$$

$$U=\pi\cdot\frac{a^2}{e} \qquad V=0$$

$$2\cdot M_1=(a^2-b^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}+a\cdot b$$
$$M=0.$$
$$2\cdot M_2=-(a^2-b^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-a\cdot b$$

Bezeichnet man noch die Werte der Koefficienten von u^2 $u\,v$ und v^2 in Formel 7) auf Seite 37 für den rechten Hyperbelzweig mit C_{uu}, C_{uv}, C_{vv}, so wird:

$$C_{uu}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}+2\frac{a\,b}{e^2}$$
$$C_{uv}=0.$$
$$C_{vv}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-2\frac{a\,b}{e^2}$$

Betrachtet man jetzt zuerst die Werte von U, V und M, so zeigt sich, dass dieselben mit den geometrischen Vorbetrachtungen von Seite 47 in Einklang sind. Die dort erhaltene Formel lässt sich ergänzen zu:

$$M' = -\pi \cdot a^2 \cdot \frac{u}{e}.$$

Zeichnet man die Fusspunktkurve der Hyperbel für irgend einen Punkt und beachtet die Gausssche Regel, so erkennt man, dass diese Formel auch das richtige Vorzeichen angiebt; es müssen also auch die Vorzeichen von U, U_1 und U_2 richtig sein. Man muss zu dem Zweck aber in dem Sinne integrieren, der auf der vorigen Seite angedeutet ist. Man kann die obige Formel in folgendem Satz aussprechen:

Satz: Vergleicht man die Inhalte der ∞^2 Fusspunktkurven der ganzen Hyperbel, so findet man, dass dieselben für alle Punkte auf der Nebenaxe gleich 0 sind, während Punkten auf einer zur Nebenaxe parallelen Geraden Kurven mit gleichem Flächeninhalt entsprechen. Ist u der Abstand einer solchen Geraden von der Nebenaxe, so ist der Flächeninhalt der Fusspunktkurven ihrer Punkte gleich dem positiven oder negativen Flächeninhalt eines Kreises vom Radius $a\sqrt{\frac{u}{e}}$.

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $a = b$, $a^2 = \frac{1}{2}e^2$; daher ist dann

$$M' = -\frac{\pi}{2} \cdot e \cdot u.$$

Da ist also der Radius jenes Kreises gleich $\sqrt{\frac{1}{2}e \cdot u}$. Vergleicht man Steiners Sätze[1]) über die Fusspunktkurven der Hyperbel, so sieht man, dass Steiner ganz andere Ergebnisse erhalten hat. Auch hier ist also Steiner ein Irrtum passiert.

Für die halbe rechte Hyperbel erhält man nach Formel 7) Seite 37

$$4M'_1 = 4M_1 - 4uU_1 - 4vV_1 + u^2 C_{uu} - uv C_{uv} + v^2 C_{vv},$$

---

1) Crelles Journal, Band XVIII, S. 372. Werke, Band II, S. 71.

oder, wenn man die gefundenen Werte einsetzt

$$2 \cdot M'_1 = (a^2 + b^2 + u^2 - v^2)\frac{a\,b}{e^2} + (a^2 - b^2 + u^2 + v^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b} - \pi \cdot a^2 \cdot \frac{u}{e}.$$

Setzt man hierin $v = 0$, so erhält man bis auf einen Unterschied eine Formel, die schon Ekama[1]) abgeleitet hat. Dort heisst es $+ \pi \cdot a^2 \cdot \frac{u}{e}$. Das muss auf einem Vorzeichenfehler beruhen. Denn, wie auf voriger Seite ausgeführt ist, käme man in Widerspruch zur Gaussschen Regel, wenn $U_1 = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{e}$ wäre. Wegen $V_1 = 0$ $C_{uv} = 0$ ergeben die Formeln 9) Seite 38

$$u_1 = 2 \cdot \frac{U_1}{C_{uu}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{a\,b + e^2\,arc\,tg\,\frac{a}{b}} \cdot e \qquad v_1 = 0.$$

Die Formel 12) liefert also

$$D_1 = 4 \cdot \frac{U_1^2}{C_{uu}};$$

daher wird

$$2 \cdot T_1 = 2 \cdot M_1 - 2 \cdot \frac{U_1^2}{C_{uu}}$$

$$= a\,b + (a^2 - b^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b} - \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{a^4}{a\,b + (a^2 + b^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b}}.$$

Der Minimumpol liegt also auf der x-Axe im Abstand u_1 vom Mittelpunkt der Hyperbel. Ihm entspricht der Minimalinhalt T_1. Die Gleichung 15) lautet hier

$$2 \cdot M'_1 = 2 \cdot T_1 + u''^2\left(\frac{a}{e} + arc\,tg\,\frac{a}{b}\right) + v''^2\left(-\frac{a}{e} + arc\,tg\,\frac{a}{b}\right).$$

Setzt man $2 \cdot M'_1 - 2\,T_1 = C^2$, so sind

$$\overline{u}^2 = \frac{C^2}{\frac{a}{e} + arc\,tg\,\frac{a}{b}} \qquad \overline{v}^2 = \frac{C^2}{-\frac{a}{e} + arc\,tg\,\frac{a}{b}}$$

die Quadrate der Axen der Ellipsen für gleichen Flächeninhalt. Das Axenkreuz der ∞^1 Ellipsen ist parallel zum Axenkreuz der Hyperbel. Man kann auch leicht die Formeln aufstellen, die für ein beliebiges Bogenstück der Hyperbel gelten.

1) Grunerts Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reihe, Teil VIII, S. 425.

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist

$$u_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} \cdot e \qquad v_1 = 0$$

$$T_1 = \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \frac{e^2}{4}.$$

Nach den Formeln 23) Seite 43 sind die Koordinaten des Krümmungsschwerpunktes

$$u_2 = \frac{U_1}{\frac{\pi}{2} - \psi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{e \cdot arc\,tg\,\frac{a}{b}} \qquad v_2 = 0.$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ergiebt sich

$$u_2 = a\sqrt{2} = e \qquad v_2 = 0.$$

Da fällt also der Krümmungsschwerpunkt S_1 mit dem Brennpunkt zusammen. Diese letzten Formeln hat auch Wetzig[1]) schon aufgestellt.

Nach Theorem I lassen sich alle diese Ergebnisse über die Hyperbel auch auf die speciellen Rollkurven derselben übertragen. Verschiedene specielle Sätze, die in diesen allgemeinen Formeln enthalten sind, findet man bei Ekama. Wetzig giebt auch eine nähere Discussion mehrerer von obigen Formeln.

Es bleibt die Frage zu beantworten, wie ist Steiner zu seinen abweichenden Resultaten über die Hyperbel gelangt. Auf voriger Seite hat sich für den rechten Hyperbelzweig ergeben:

$$2 \cdot M'_1 = (a^2 + b^2 + u^2 - v^2)\frac{a\,b}{e^2} + (a^2 - b^2 + u^2 + v^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b} - \pi \cdot a^2 \cdot \frac{u}{e}.$$

Durch entsprechende Rechnungen findet man für den linken Hyperbelzweig

$$2 \cdot M'_2 = -(a^2 + b^2 + u^2 - v^2)\frac{a\,b}{e^2} - (a^2 - b^2 + u^2 + v^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b} - \pi \cdot a^2 \cdot \frac{u}{e}.$$

1) Wetzig. Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band V, Seite 94.

Addition dieser Formeln liefert

$$2 \cdot M' = 2\,(M'_1 + M'_2) = -\,2\,\pi \cdot a^2 \cdot \frac{u}{e}.$$

Dabei ist dann gemäss der Gaussschen Regel z. B. bei einer 8-förmigen Kurve eine Schleife positiv und die andere negativ gerechnet. Bei der Hyperbel ergeben sich nun zum Teil solche 8-förmigen Kurven. Man kann dann den Flächeninhalt dieser Kurven auch so auffassen, dass man beide Schleifen positiv rechnet. Der in diesem Sinne genommene Flächeninhalt der Fusspunktkurven möge mit M'' bezeichnet werden. Für denselben werden natürlich die bisher abgeleiteten allgemeinen Sätze nicht gelten. Um M'' zu finden, muss man die erhaltenen Werte subtrahieren; dann erhält man:

$$M'' = M'_1 - M'_2 = (a^2 + b^2 + u^2 - v^2)\frac{a\,b}{e^2} + (a^2 - b^2 + u^2 + v^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b}.$$

Daraus findet man, dass der Mittelpunkt der Hyperbel der Minimumpol ist; der diesem Punkte entsprechende kleinste Flächeninhalt ist

$$T'' = (a^2 + b^2)\frac{a\,b}{e^2} + (a^2 - b^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b}.$$

Setzt man das ein, so erhält man

$$M'' = T'' + \left(\frac{a\,b}{e^2} + arc\,tg\,\frac{a}{b}\right)u^2 + \left(-\,\frac{a\,b}{e^2} + arc\,tg\,\frac{a}{b}\right)v^2.$$

Setzt man $M'' - T'' = C^2$ und

$$\overline{=}u^2 = \frac{C^2}{\frac{a\,b}{e^2} + arc\,tg\,\frac{a}{b}} \qquad \overline{=}v^2 = \frac{C^2}{-\,\frac{a\,b}{e^2} + arc\,tg\,\frac{a}{b}},$$

so kann man diese Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{u^2}{\overline{=}u^2} + \frac{v^2}{\overline{=}v^2} = 1.$$

Die Kurven gleichen Flächeninhalts sind also Ellipsen, deren Mittelpunkt und Axenkreuz mit dem Mittelpunkt und Axen-

kreuz der Hyperbel zusammenfällt. Die Quadrate der Axen haben das Verhältnis

$$\bar{\bar{u}}^2 : \bar{\bar{v}}^2 = \left(-ab + e^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}\right) : \left(ab + e^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}\right).$$

Diese Resultate stimmen mit denen Steiners überein. Nach Steiner müsste es nur heissen $\bar{\bar{u}} : \bar{\bar{v}}$ und nicht $\bar{\bar{u}}^2 : \bar{\bar{v}}^2$. Bringt man diese kleine Korrektur an, so ist also auch der Satz von Steiner ein durchaus richtiger und brauchbarer; freilich mit den hier betrachteten allgemeinen Untersuchungen hat er nichts zu thun. Von Interesse ist die Konstruktion, die Steiner für die Flächenstücke T'' und M'' angiebt.

V. Verallgemeinerung des Steinerschen Problems.

§ 1. Vergleichung der Flächeninhalte.

Steiners Problem besteht in Folgendem. Er betrachtet eine Kurve K und führt auf sie eine Schar T von ∞^2 Berührungstransformationen aus; Fusspunkttransformationen oder Rollungen sind es bei ihm. Dadurch erhält er eine Schar von ∞^2 Kurven M. Da der Flächeninhalt nur ∞^1 Werte annehmen kann, so müssen diese ∞^2 Kurven sich anordnen lassen in ∞^1 Scharen von je ∞^1 Kurven gleichen Flächeninhalts. Damit müssen auch die ∞^2 Transformationen T in solcher Weise zu ∞^1 Scharen S von je ∞^1 Transformationen angeordnet werden, dass die Transformationen jeder Schar die Kurve K in Kurven M von gleichem Flächeninhalt überführen. Diese ∞^1 Scharen werden bestimmt durch eine Relation zwischen den Parametern a und b der Schar T, eine Relation, die noch eine willkürliche Konstante enthält. Dieselbe kann man auffassen als Definitionsgleichung von ∞^1 Kurven Γ. Jeder Kurve entspricht eine der ∞^1 Scharen S. Steiners Problem besteht in der Auffindung dieser Kurven Γ und damit zugleich der Scharen S.

Die Schar T kann man augenscheinlich ganz willkürlich wählen. Man kann ∞^2 Punkttransformation, Berührungstrans-

formationen oder noch allgemeinere Transformationen wählen. Steiner betrachtet keine Punkttransformationen, sondern Berührungstransformationen, und zwar Fusspunkttransformationen und Rollungen; ausserdem untersucht er noch eine Schar von Transformationen, die weder Punkttransformationen noch Berührungstransformationen sind.[1]) Setzt man an die Stelle dieser Transformationsscharen irgend eine andere Schar von ∞^2 Transformationen, so erhält man eine unendliche Reihe analoger Probleme. Diejenigen unter ihnen, die von Steiner behandelt worden sind, verdienen deshalb ein besonderes Interesse, weil sich die Gestalt der Kurven Γ ganz unabhängig von der Gestalt der Kurve K angeben lässt. Es fragt sich, ob es analoge Probleme giebt, in denen gleichfalls die Gestalt der Kurven Γ nur durch die besondere Schar T von Transformationen bedingt wird, hingegen unabhängig ist von der Kurve K.

Das ist nun in der That der Fall. Eine solche Schar T kann nämlich in der folgenden Weise hergestellt werden. Es seien

$$1)\quad x_1 = X_1(x, y, \alpha) \qquad y_1 = Y_1(x, y, \alpha)$$

∞^1 Transformationen, die nicht flächentreu sind, und

$$2)\quad x_2 = X_2(x_1, y_1, \beta) \qquad y_2 = Y_2(x_1, y_1, \beta)$$

∞^1 flächentreue Transformationen. Dann substituiere man in den Gleichungen 2) für x_1, y_1 die Funktionen aus den Gleichungen 1); dadurch erhält man Gleichungen von der Form

$$3)\quad x_2 = X'(x, y, \alpha, \beta) \qquad y_2 = Y'(x, y, \alpha, \beta).$$

Diese Gleichungen stellen eine derartige Transformationsschar T dar. Giebt man in den Gleichungen 3) α einen festen konstanten Wert α_1, so wird die Kurve K durch die Transformationen 3) in ∞^1 Kurven M übergeführt, die unter sich flächengleich sind. Die Kurven Γ sind also die ∞^1 Geraden $\alpha = Const.$ Will man erreichen, dass die Kurven Γ nicht gerade Linien sind, so braucht man nur die obigen ∞^2 Trans-

1) Steiners Werke, Band II, S. 132.

formationen anders anzuordnen, was dadurch geschehen kann, dass man für α, β andere Parameter einführt. Man setzt etwa

$$4)\quad \alpha = A(a, b) \qquad \beta = B(a, b)$$

in die Gleichungen 3) ein, wodurch dieselben die Form erhalten:

$$5)\quad x_2 = X(x, y, a, b) \qquad y_2 = Y(x, y, a, b).$$

Die Kurven Γ sind dann definiert durch die Gleichung

$$6)\quad A(a, b) = \alpha = Const.$$

Giebt man α einen festen konstanten Wert α_1 und betrachtet die Wertepare a, b, die der Gleichung $A(a, b) = \alpha_1$ genügen, so werden dadurch also ∞^1 Transformationen festgestellt, die K in ∞^1 Kurven M überführen, welche unter sich flächengleich sind.

An Stelle der Punkttransformationen 1) kann man auch Berührungstransformationen oder noch allgemeinere Transformationen nehmen; die Scharen 1) und 2) können auch eingliedrige Gruppen sein.

Damit ist in der That gezeigt, dass weitere Beispiele aufgestellt werden können, die ebenso allgemein lösbar sind wie die Steinerschen. Geht man diesen Weg, so sind die Kurven Γ — wenigstens bei geschlossenen Kurven K — von vornherein bekannt. Wichtiger und viel schwieriger ist aber die umgekehrte Aufgabe, für eine gegebene Transformationsschar T die Kurven Γ und damit die Scharen S erst aufzufinden. Es wäre von Interesse zu versuchen, ob sich diese Aufgabe noch für andere wichtige Scharen von ∞^2 Transformationen ebenso allgemein durchführen lässt.

§ 2. Vergleichung der Bogenlängen.

Für das Problem der Vergleichung der Bogenlängen gelten ganz ähnliche Betrachtungen. Man kann gleichfalls beliebig viele dem Steinerschen Problem analoge Probleme aufstellen. Man kann auch entsprechend Probleme finden, die sich vollständig lösen lassen.

Man braucht nur an Stelle der Transformationsschar 2) eine Schar von Transformationen zu setzen, welche Längen

ungeändert lassen. Die einzigen derartigen Transformationen sind die ∞^3 Bewegungen der Ebene, die eine dreigliedrige Gruppe bilden. Für die Schar 2) muss man also irgend eine Schar von ∞^1 Bewegungen einsetzen.

Interessanter sind wieder die umgekehrten Aufgaben, zu denen auch Steiners Aufgaben über die Bogenlänge von Fusspunktkurven und Rollkurven gehören. Steiner[1]) sagt zwar, dass er dieselben lösen könne. Bei dieser Versicherung ist es aber auch geblieben. Das beruht wohl nicht etwa darauf, dass er von diesen Untersuchungen abgelenkt worden ist. Er hat wahrscheinlich mehr versprochen, als er halten konnte. Bisher ist von diesen Aufgaben noch keine gelöst worden.

---

1) Werke, Band II, S. 101.

Druckfehler-Berichtigung.

Lies Seite 22, Zeile 12 von unten ***DBP*** statt *DPB*, Seite 23, Zeile 11 von oben Seite **14** statt Seite 11, und Seite 24, Zeile 17 von oben Seite **19** statt Seite 16.

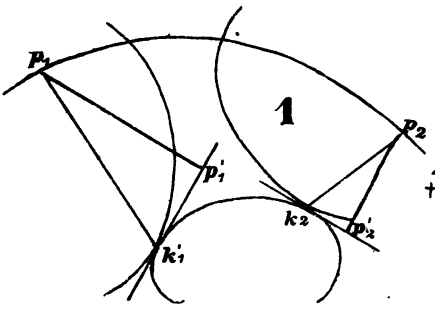
Oschatz, den 9. Juli 1898.

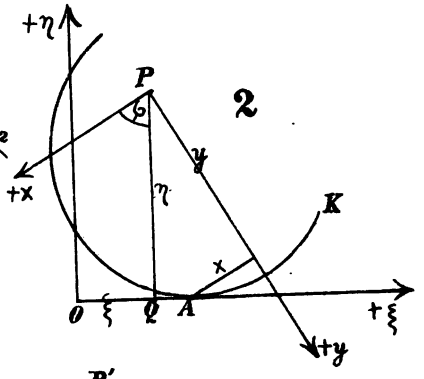
Lebenslauf.

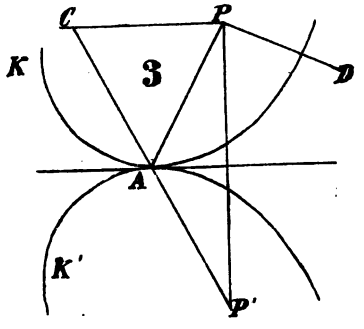
Am 2. April 1874 in Eiskuhl bei Ückermünde als Sohn des Mühlenbesitzers Albert Franck geboren, besuchte ich, Paul Albert Richard Franck, zuerst die höhere Bürgerschule in Ückermünde und von Ostern 1887 ab das Schillerrealgymnasium in Stettin. Nach bestandener Reifeprüfung ging ich Ostern 1893 nach Heidelberg, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Bereits nach einem Semester siedelte ich nach Leipzig über, wo ich bis zur Beendigung meiner Studienzeit blieb. Im Wintersemester 1896/97 erhielt ich nach bestandener Prüfung das Oberlehrerzeugnis. Nachdem ich in Greifswald meiner Dienstpflicht als Einjährig-Freiwilliger genügt hatte, wurde ich am 15. April 1898 der Realschule mit Progymnasium in Oschatz zur Ableistung meines Probejahres zugewiesen.

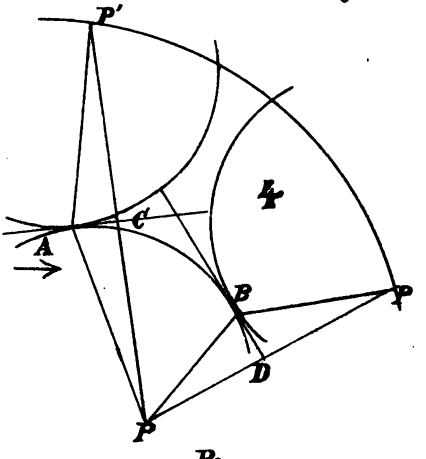
Während meiner acht Studiensemester hörte ich die Vorlesungen der Professoren und Dozenten Cantor, Drude, Engel, Hofmann, Königsberger, Landsberg, Lenk, Leuckart, Lie, Marshall, Mayer, v. Öchelhäuser, Ostwald, Pfeffer, Richter, Scheffers, Scheibner, Volkelt, Wiedeburg, Wiedemann, Wislicenus, Wundt und nahm teil an den Seminaren bezw. Übungen der Herren Professoren Königsberger, Lehmann, Lie, Mayer, Ostwaldt, Wiedemann.

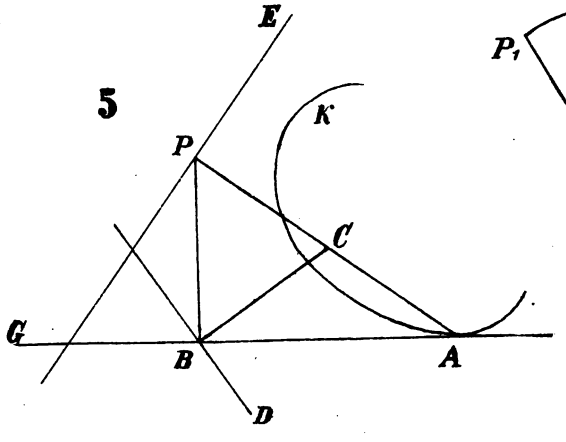
Ihnen allen sage ich meinen Dank. Ganz besonders aber bin ich den Herren Professoren Lie und Mayer für ihre Anregung und Unterstützung zu Dank verpflichtet. Herrn Professor Lie verdanke ich auch die Anregung zu der vorliegenden Arbeit.

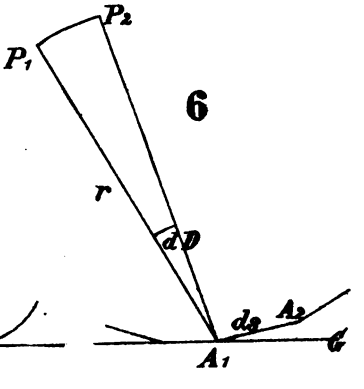

1
p_1
p_2
p'_1
p'_2
k_1
k_2

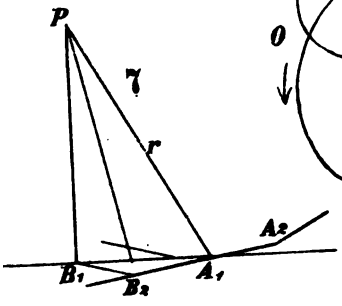

2
$+\eta$
$+x$
$+y$
$+\xi$
P
y
η
x
K
O
ξ
Q
A


3
C
P
K
D
A
K'
P'

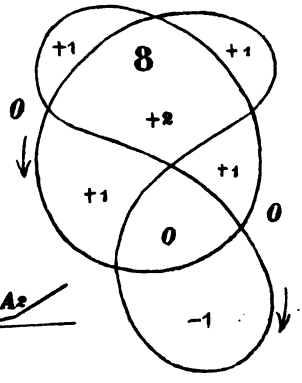

4
P'
C
A
B
P
D
P

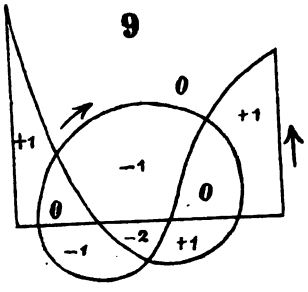

5
E
K
P
C
G
B
A
D

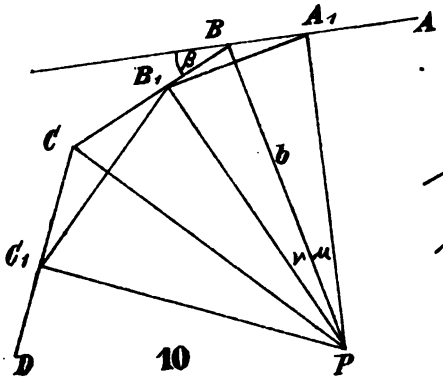

6
P_1
P_2
r
d
D
d_2
A_2
A_1
G


P
r
A2
B1
B2
A1

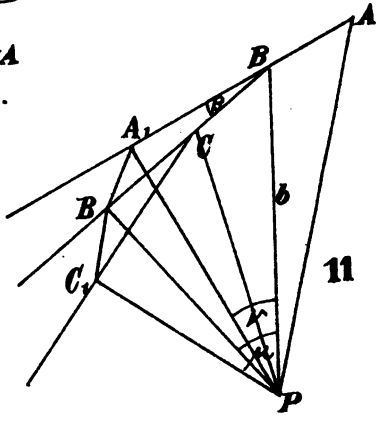
7


+1
8
+1
0
+2
+1
+1
0
0
-1

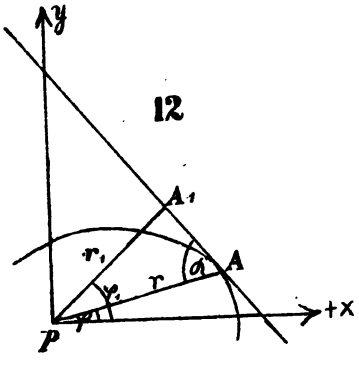

9
0
+1
+1
-1
0
0
-1
-2
+1

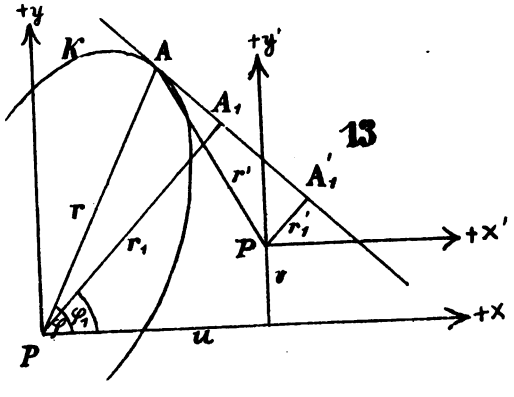

B
A1
A
B1
β
C
b
C1
μ
μ
D
P

10


A
B
A1
C
B
b
C1
P

11


y
12
A1
r1
r
A
P
+x


+y
K
A
+y'
A1
13
r'
A'1
r
r1
r'1
P
+x'
v
+x
P
u

Math 9008.99.3
Uber die flacheninhalte und bogenl
Cabot Science 003374218
3 2044 091 929 182